内容简介

本书是与《信号与系统》(第2版,A. V. Oppenheim等著,刘树棠译,西安交通大学出版社,1998)配套的一本计算机试验教材,旨在加深理解信号与系统的基本原理。这些练习将基本原理与应用直接联系起来。利用MATLAB,这些练习向读者在将数学概念应用于实际问题中提出了积极挑战。全部练习都尽力将其分为基本题、中等程度题和深入题,以使读者能逐步由基本理论过渡到实际应用。内容包括:信号与系统、线性时不变系统、周期信号的傅里叶级数表示、连续与离散时间傅里叶变换、信号与系统的时域频域之间的关系、采样、通信系统、拉普拉斯变换、z变换和反馈系统等。

与该书配套的尚有一套工具软件,内含丰富的供计算机试验所用的各种语音和金融数据文件。

该书所包括的试验内容可适合于任何面向大学本科生所开设的"信号与系统"或"信号及线性系统"等课程用作计算机试验教材。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统计算机练习:利用MATLAB/(美)巴克(Buck,J.R.)著;刘树棠译.—西安:西安交通大学出版社,2000.6
ISBN 7-5605-1272-0

Ⅰ.信… Ⅱ.①巴…②刘… Ⅲ.信号与系统-高等学校-教材 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21807号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路28号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
长安县第二印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:10.5 字数:245千字
2000年6月第1版 2000年6月第1次印刷
印数:0 001~3 000 定价:16.00元
陕版出图字:25-2000-068号

若发现本社图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题,请去当地销售部门调换或与我社发行科联系调换。发行科电话:(029)2668357,2667874

第 1 章

信号与系统

信号与系统的基本概念出现在各种不同的场合,从工程设计到金融分析等等。这一章将要学习如何用 MATLAB 来表示、处理和分析基本的信号与系统。1.1 节的内容包含了以 MATLAB 构成信号所用到的一些基本工具,它不是要代替在 The Student Edition of MATLAB User's Guicle 和 The MATLAB User's Guide 中所提供的学习指南,而是这两本指南的一个补充。如果你还没有熟悉这两本学习指南的话,竭力建议你在开始学习这一章之前,先读一读这两本指南中的任一本,并给予实践。虽然这一章并不需要用到这两本学习指南中所介绍的全部 MATLAB 函数,但是其中大多数在本书的某一点上将会用到。

在信号与系统分析中往往要用到复指数信号,部分原因是由于复指数信号是构成其他各种信号的基本构造单元的缘故。练习 1.2 包括产生和画出离散时间正弦信号所要求的 MATLAB 函数。离散时间正弦信号就等于两个离散时间复指数信号之和,即

$$\cos(\omega n) = \frac{1}{2}(e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}) \tag{1.1}$$

$$\sin(\omega n) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}) \tag{1.2}$$

练习 1.3 说明在经过自变量 n 变换之后,如何画出离散时间信号 $x[n]$。接下来两个练习是用 MATLAB 进行系统的表示。对于练习 1.4 必须要表明你对诸如线性和时不变性等基本系统性质的理解程度,而练习 1.5 必须要实现一个由一阶差分方程表示的系统。

本章有几个练习要用 Symbolic Math Toolbox 来研究基本信号与系统。练习 1.6 要对连续时间复指数信号构造符号表达式,这类信号具有某个复数 s 的 e^{st} 形式。(注意:在本书中 i 和 j 都用来代表虚数 $\sqrt{-1}$,但是 MATLAB 的 Symbolic Math Toolbox 仅将 i 当作 $\sqrt{-1}$,所以只要在用 Symbolic Math Toolbox 编程时,必须要用 i 而不能用 j 来表示 $\sqrt{-1}$)。练习 1.7 利用 Symbolic Math Toolbox 来实现连续时间信号的时间变量变换。练习 1.8 要对周期信号能量及时间平均功率的有关能量建立解析表达式。

1.1 表示信号的基本 MATLAB 函数

这一节要学会如何应用几个 MATLAB 函数,这几个函数在本书中是常常被用来构成和处理信号的。如果你还没有熟悉它们的话,鼓励你去读一读 The Student Edition of MATLAB 手册中的内容。本节所给出的不是要代替这本手册中的内容,而是要说明所叙述的一些函数

怎样用于表示和处理信号。尽管在这一节要讨论的内容没有任何习题,但是你还是应该重复做一下用 MATLAB 的全部例子,以便对用到的命令多一些实践。

一般来说,信号是用一个行向量或一个列向量来表示的,这取决于具体情况。在 MATLAB 中全部向量都是从 1 开始编号的,即 y(1)是向量 y 的第 1 个元素。如果这些编号与你的应用不能对应,可以创建另外一个标号向量以正确地与信号编号保持一致。例如,为了表示离散时间信号

$$x[n]=\begin{cases}2n, & -3\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

首先可以利用**冒号**运算对 $x[n]$的非零样本定义标号向量,然后再定义向量 x,它包含了在这些时间编号每一点上的信号值

```
≫n=[-3:3];
≫x=2*n;
```

应该注意到,上面在每一命令的尾部都用了**分号**;用以除掉不必要的 MATLAB 回响。若是没有这个**分号**,就会得出如下的结果:

```
≫n=[-3:3];
n=
    -3   -2   -1   0   1   2   3
```

键入 stem(n,x)就能够画出这个信号。如果想要在一个更宽的范围内检查信号,就需要拓宽 n 和 x。例如如果要在 $-5\leqslant n\leqslant 5$ 范围内画出这个信号,就可以拓宽标号向量 n,然后将这些附加的元素加到向量 x 上,以得到这些新的样本

```
≫n=[-5:5];
≫x=[0  0  x  0  0];
```

如果想要大大扩展信号范围,会发现这时用 zeros 函数是很方便的。例如要想包括 $-100\leqslant n\leqslant 100$ 的范围,而又已经将向量 x 扩展到 $-5\leqslant n\leqslant 5$ 以后,这时就可键入

```
≫n=[-100:100];
≫x=[zeros(1,95)  x  zeros(1,95)];
```

假设要定义 $x_1[n]$是离散时间单位脉冲函数,而 $x_2[n]$是 $x_1[n]$的时间超前,即 $x_1[n]=\delta[n]$和 $x_2[n]=\delta[n+2]$,用 MATLAB 表示这两个信号,就可键入

```
≫ nx1=[0:10];
≫ x1=[1 zeros(1,10)];
≫ nx2=[-5:5];
≫ x2=[zeros(1,3)  1  zeros(1,7)];
```

然后,用 stem(nx1,x1)和 stem(nx2,x2)就能够画出这些信号。如果不定义标号向量,只是键入 stem(x1)和 stem(x2),那么所画出来的图是 $\delta[n-1]$和 $\delta[n-4]$,而不是所期望的信号。在后面的章节中当做一些更为深入的练习时,标号向量在保持一个向量时间原点的联系上也是有用的。

在 MATLAB 中表示连续时间信号将用两种方法。一种方法是用 Symbolic Math Toolbox,本书中凡是要用到 Symbolic Math Toolbox 的练习都在该练习标题的末尾标以符号Ⓢ。另一种方法是用向量来表示连续时间信号,这些向量包含了该信号在时间上依次隔开的样本。

在本书开头的几章中都用依次隔开的样本来表示连续时间信号,所涉及的题目总是明确给出样本间的时间间隔,用以保证准确地表示出该信号。在第7章要讨论关于用离散时间样本来表示连续时间信号的问题。依次隔开的时间标号向量可以用几个方法创建出。其中两个简单的方法是用具有任选步长宗量的**分号**算符和利用 linspace 函数。例如,如果想要创建一个覆盖区间为 $-5\leqslant t\leqslant -5$,步长为0.1秒的向量,就既可以用 t=[-5:0.1:5],或者用 t=linspace(-5,5,101)。

在研究线性系统中,正弦信号和复指数信号都是重要的信号。MATLAB 提供了几个函数,这些函数对于定义这些信号是有用的,特别是在已经定义出一个连续时间或离散时间标号向量的情况下更是这样。例如,要想形成一个代表 $x(t)=\sin(\pi t/4)$, $-5\leqslant t\leqslant 5$,的向量,就能够利用在上面已定义出的向量 t,然后键入 x=sin(pi * t/4)。值得注意的是,当 sin(或者像 cos 和 exp 等很多其他 MATLAB 函数)的宗量是某一个向量时,这个函数就产生同样大小的一个向量,这里输出向量中的每一个元素是加入的输入向量中对应元素的函数。可以用 plot 命令画出该连续时间信号 $x(t)$ 的近似图。和 stem 不一样,plot 用直线将相邻的各元素连接起来,所以当时间标号取得足够细的话,用直线所连接的结果就是该原始连续时间信号图形的一个好的近似。对于这个例子,键入 plot(t,x)就能得到这样一张图。一般来说,要求用 stem 画短的离散时间序列,而用 plot 画连续时间信号已采样的近似图,或者画那些离散值个数难以控制增长地,很长的离散时间信号。

离散时间正弦信号和复指数信号也能用 cos,sin 和 exp 函数产生。例如,为了表示离散时间信号 $x[n]=e^{j(\pi/8)n}$, $0\leqslant n\leqslant 32$,可以键入

```
≫n=[0:32];
≫x=exp(j * (pi/8) * n);
```

现在,向量 x 包括了信号 $x[n]$ 在区间 $0\leqslant n\leqslant 32$ 内的复数值。为了画出复数信号,必须要分别画出它们的实部和虚部,或者幅值和相角。MATLAB 函数 real, imag,abs 和 angle 逐次计算出一个复数向量的这些函数。用键入如下命令可以画出这个复信号的每一个函数

```
≫ stem(n,real(x))
≫ stem(n,imag(x))
≫ stem(n,abs(x))
≫ stem(n,angle(x))
```

对于最后的例子要注意,由 angle 所产生的值是以弧度计的复数相位,为了转换成度数,应键入 stem(n,angle(x) * (180/pi))。

MATLAB 也可以对信号做加、减、乘、除、乘以标量以及对信号取幂,只要代表信号的这些向量都有相同的时间原点和相同的元素个数,即

```
≫ x1=sin(pi/4) * [0:15];
≫ x2=cos(pi/7) * [0:15];
```

就能执行以下的逐项运算:

```
≫ y1=x1+x2;
≫ y2=x1-x2;
≫ y3=x1. * x2;
≫ y4=x1. * /x2;
```

```
≫ y5=2*x1;
≫ y6=x1.^3;
```

注意,对于逐项地做乘、除和取幂运算,必须要在该算符的前面放一个圆点,也就是用.*函数来代替*来做逐项相乘。MATLAB解释*算符(不带圆点)是矩阵相乘算符,而不是逐项相乘。例如,如果试图用*来做x1和x2的相乘,就会收到下面出错信息:

```
≫ x1*x2
≫ ??? Error using==> *
≫ Inner matrix dimensions must agree.
```

因为矩阵相乘要求第1个宗量的列数等于第2个宗量的行数,而对于这两个均为1×5的向量x1和x2来说是不对的。同样,当做向量的逐项相除和取幂时,也要小心用./和.^,因为/和^都是矩阵运算。

MATLAB还包括几个命令用以帮助你对图给予适当地标注,以及将图打印出来。title命令是将其所含的宗量放在当前的图上作为标题。命令xlabel和ylabel让你将你的图的坐标轴给予标注,使之清楚地表明画的是什么图。所得到的每一张图都应该有一个标题,两根坐标轴都要给予标注。例如,还是考虑下面信号和标号向量的一张图:

```
≫ n=[0:32];
≫ x=exp(j*(pi/8)*n);
≫ stem(n,angle(x))
```

可以键入下面命令将图给予标注:

```
≫ title('phase of exp(j*(pi/8)*n)')
≫ xlabl('n(samples)')
≫ ylabel('phase of x[n] (radians)')
```

print命令可以将当前的图打印出来。应该先键入help print命令以明白你的系统运行情况,因为取决于所用的操作系统和计算机组成情况的不同,可能会有些微地变化。

另一个MATLAB的重要特点是能够写M文件。有两种类型的M文件:函数和命令脚本。一个命令脚本就是MATLAB命令的一个文本文件,其文件名在当前的工作目录或在MATLABPATH的其它地方都以.m结尾。如果键入这一文件名面没有.m,那么包含在这个文件中的命令将被执行。利用这些脚本会在本书中做这些练习要容易地多。许多练习都要求用类似的或相同的方式处理几个信号。如果不用这些脚本,就得重新再键入所有的命令。然而,如果用一个脚本做了第1道题,就能够在那个练习中用复制脚本文件处理全部后续信号,并且将它进行编辑以处理新的信号。

例如,设想已有了下面脚本文件prob1.m,要画出离散时间信号$\cos(\pi n/4)$,并计算在区间$0\leqslant n\leqslant16$内的均值

```
% prob1.m
n=[0:16];
x1=cos(pi*n/4);
y1=mean(x1);
stem(n,x1)
title('x1=cos(pi*n/4)')
```

```
xlabel('n(samples)')
ylabel('x1[n]')
```

然后,要想对 $x_2[n]=\sin(\pi n/4)$做同样的内容,就能将 prob1.m 复制到 prob2.m,再稍许编辑一下就得到

```
% prob2.m
n=[0:16];
x2=sin(pi*n/4);
y2=mean(x2);
stem(n,x2)
title('x=sin(pi*n/4)')
xlabel('n(samples)')
ylabel('x2[n]')
```

然后,能键入 prob2 运行这些命令,产生所期望的图并计算出这个新信号的平均值。不是再重新键入全部 7 行的内容,而是仅需要编辑大约 12 个字符就可以了。竭力鼓励你在本书做习题中用脚本文件,对每个练习,甚至对每个习题都用一个单独的脚本文件。脚本文件也使得排除错误更加容易,因为可以盯住 1 个错误,然后很容易地将修改过的命令串再运行一次。最后,当做完一个练习时,很容易打印出脚本文件,并作为作业的记录交上去。

实现一个函数的 M 文件是一个具有标题并以.m 结尾的文本文件,其第 1 个字是 function。该文件第 1 行的其余部分给出这个函数输出和输入宗量名。例如,下面的 M 文件实现一个称为 foo 的函数,它接收一个输入 x,并产生出 y 和 z,分别等于 2 * x 和(5/9) * (x-32)

```
function [y,z]=foo(x)
% [y,z]=foo(x) accepts a numerical argument x and
% returns two arguments y and z, where y is 2*x
% and z is (5/9)*(x-32)
y=2*x;
z=(5/9)*(x-32);
```

调用 foo 的两个具体例子如下所示:

```
>>[y,z]=foo(-40)
y=
   -80
z=
   -40

>>[y,z]=foo(212)
y=
   424
z=
   100
```

本书所提到的这些命令决不是做本书中的练习所需要的全部命令,而只是为开始应用

MATLAB 所备的。本书中以后的练习都认为在应用以上所讨论的命令方面都很熟练了，并且还能够利用任一本手册或 help function 学会 MATLAB 中其他的基本数学命令。对于在信号处理中的专门函数将在后续各章有关材料中介绍。再重复一遍，如果你还没有熟悉有关内容的话，应该学一学 MATLAB 手册中的一般内容，以使能熟悉在 MATLAB 中可以利用的这些函数。

1.2 离散时间正弦信号

离散时间复指数信号在离散时间信号与系统分析中起着重要的作用。一个离散时间复指数具有 α^n 的形式，这里 α 是一个复数标量。离散时间正弦和余弦信号能够用置 $\alpha = e^{\pm j\omega}$ 由复指数信号构成，即

$$\cos(\omega n) = \frac{1}{2}(e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}) \tag{1.3}$$

$$\sin(\omega n) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}) \tag{1.4}$$

在这个练习中，要创建和分析几个离散时间正弦信号。连续时间正弦信号和离散时间正弦信号之间有很多相似之处，这可以将(1.3)～(1.4)式与稍后的(1.7)～(1.8)式作简单比较就能看出。然而，在这个练习中也要考查连续和离散时间正弦信号之间的重要差别。

基本题

(a) 考虑下面离散时间信号：

$$x_M[n] = \sin\left(\frac{2\pi Mn}{N}\right)$$

假设 $N=12$。对于 $M=4,5,7$ 和 10，在 $0 \leqslant n \leqslant 2N-1$ 区间上画出 $x_M[n]$。用 stem 创建这些图，并在图的各坐标轴上给出适当标注。每一个信号的基波周期是什么？由任意的整数 M 和 N 值，一般应如何来确定信号的基波周期？务必要考虑 $M>N$ 的情况。

(b) 考虑信号

$$x_k[n]\sin(\omega_k n)$$

式中 $\omega_k = 2\pi k/5$。给出 $k=1,2,4$ 和 6，用 stem 对 $x_k[n]$ 画出每个信号在区间 $0<n<9$ 内的图。应该利用 subplot 在同一张图上用单独的坐标轴画出全部信号。已画出的图中有多少个唯一的信号？如果两个信号是完全一样的，请解释为何不同的 ω_k 会产生同一个信号。

(c) 现在考虑下面 3 个信号：

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi n}{N}\right)$$

$$x_2[n] = 2\cos\left(\frac{2n}{N}\right) + \cos\left(\frac{3n}{N}\right)$$

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi n}{2N}\right)$$

假设对每个信号 $N=6$。试确定是否每个信号都是周期的。如果某一信号是周期的，从 n

=0开始，画出该信号的两个周期；如果该信号不是周期的，对于 $0\leqslant n\leqslant 4N$ 画出该信号，并说明为什么它不是周期的。记住：用 stem，而且要将坐标轴给出适当标注。

中等题

(d) 在 $0\leqslant n\leqslant 31$ 内画出下面每一个信号：

$$x_1[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$x_2[n]=\cos^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$x_3[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$$

每个信号的基波周期是什么？对于这3个信号中的每一个，不依赖 MATLAB，如何来确定基波周期？

(e) 考虑在上面(c)和(d)中已画出的信号。两个周期信号的相加必定还是周期的吗？请说明你的结果。

1.3 离散时间信号时间变量的变换

在这个练习中要研究如何用 MATLAB 表示离散时间信号。另外，还要研究诸如信号延时，或将时间轴倒置这样一些简单的自变量变换所产生的效果。这些自变量的基本变换常常在研究信号与系统中出现，所以对它们应用自如而自信在研究更为深入的题目时将会非常有益。

基本题

(a) 定义一个 MATLAB 向量 nx 是在 $-3\leqslant n\leqslant 7$ 上的时间变量，而 MATLAB 向量 x 是信号 $x[n]$ 在这些样本上的值，这里 $x[n]$ 给出如下：

$$x[n]=\begin{cases}2, & n=0\\1, & n=2\\-1, & n=3\\3, & n=4\\0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

如果已经正确地定义出这些向量，就应该能够用键入 stem(nx,x)画出这个离散时间序列，其结果应该与所给出的图1.1一致。

(b) 这一部分要定义 MATLAB 向量 y1～y4，用来表示下面离散时间信号：

$$y_1[n]=x[n-2]$$

$$y_2[n]=x[n+1]$$

$$y_3[n]=x[-n]$$

$$y_4[n]=x[n+1]$$

为此，应该定义 y1～y4 等于 x，关键就是要正确定义标号向量 ny1～ny4。首先应该断定，

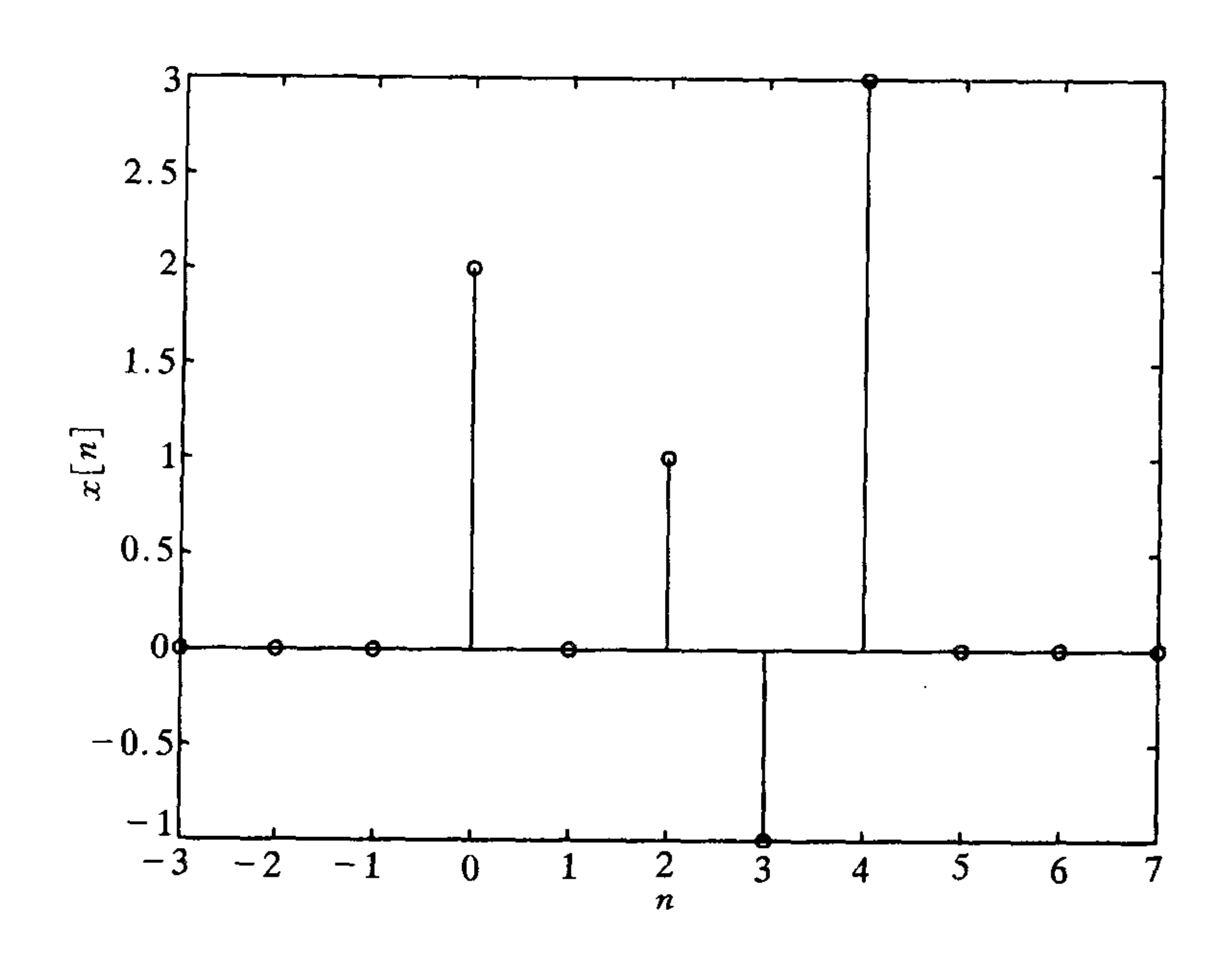


图 1.1 离散时间信号 $x[n]$

当变换到 $y_i[n]$时，一个给定的 $x[n]$样本的变量是如何改变的。标号向量不必要跨于和 nx 相同的一组变量值，但是至少应该都是 11 个样本长，并且包括了与有关信号全部非零样本的那些变量值。

(c) 利用 stem 产生 $y_1[n]$到 $y_4[n]$的图。根据这些图，陈述一下每个信号是如何与原始信号 $x[n]$相联系的，譬如说"延时 4"或"倒置再超前 3"等等。

1.4 离散时间系统性质

离散时间系统往往是用几个性质来给予表征的，如线性、时不变性、稳定性、因果性以及可逆性等。重要的是要懂得如何来证明一个系统满足或不满足某一给定性质。MATLAB 可以用来构成一些反例证明某些性质不满足。在这个练习中，将会得到有关用 MATLAB 对各种系统和性质构成这样一些反例的实践。

基本题

对于这些习题，将会知道某一给定系统不满足哪个性质，并且会知道明确证明该系统如何违反这个性质的输入序列。对于每一个系统，定义代表输入和输出的 MATLAB 向量，然后画出这些信号的图，并构造一个十分合理的论点说明这些图形是如何证明该系统没有满足该性质的。

(a) 系统 $y[n]=\sin((\pi/2)x[n])$不是线性的。利用信号 $x_1[n]=\delta[n]$和 $x_2[n]=2\delta[n]$来证明该系统是如何违反线性性质的。

(b) 系统 $y[n]=x[n]+x[n+1]$不是因果的。利用信号 $x[n]=u[n]$证明它。定义 MATLAB 向量 x 和 y 分别代表在 $-5\leqslant n\leqslant 9$ 上的输入和在 $-6\leqslant n\leqslant 9$ 上的输出。

中等题

对于这些题，已经知道某一系统，它不满足某一性质，而必须要找出一个输入或一对输入信号用以支撑你的论点。再一次创建 MATLAB 向量代表系统的输入和输出，并对这些向量产生适当的图，利用这些图作出明确而简洁地论断：为什么该系统不满足所给定的性质。

(c) 系统 $y[n]=\log(x[n])$不是稳定的。

(d) 上述(a)中的系统不是可逆的。

深入题

对于下列的每一个系统，陈述系统是否是线性、时不变、因果、稳定和可逆的。对于你声称该系统不具有的每一个性质，要用 MATLAB 构造一个反例证明该系统如何违反该性质的。

(e) $y[n]=x^3[n]$

(f) $y[n]=nx[n]$

(g) $y[n]=x[2n]$

1.5 实现一阶差分方程

离散时间系统往往用线性常系数差分方程来实现。两种最简单的差分方程是一阶移动平均

$$y[n] = x[n] + bx[n-1] \tag{1.5}$$

和一阶自递归

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{1.6}$$

能用这些简单系统对许多实际系统进行建模或近似。例如，一阶自递归可以用于银行帐户建模，这时 $y[n]$就是第 n 次的结余，$x[n]$是第 n 次的存款或取款，而 $a=1+r$ 就是利率为 r 的复利。在这个练习中，要求写出一个函数，该函数可实现一阶自递归方程。然后要求在一些示例性的系统上测试和分析这个函数。

深入题

(a) 写出一个函数 y=diffeqn(a,x,yn1)该函数计算由(1.6)式确定的因果系统的输出 $y[n]$。输入向量 x 包含 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内的 $x[n]$，**yn1** 提供 $y[-1]$的值。输出向量 y 包含 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内的 $y[n]$。M 文件的第 1 行应该读出

function y=diffeqn(a,x,yn1)

提示：注意 $y[-1]$对计算 $y[0]$是必须的，这就是自递归的第 1 步。在 M 文件内利用 for 循环从 $n=0$ 开始依次计算到较大 n 值的$y[n]$。

(b) 假设 $a=1$，$y[-1]=0$，而且仅关心在 $0\leqslant n\leqslant 30$ 内的输出。利用这个函数计算 $x_1[n]=\delta[n]$和 $x_2[n]=u[n]$时的响应，用 stem 画出每个响应。

(c) 再次假设 $a=1$，而 $y[-1]=-1$，利用这个函数计算当输入 $x_1[n]=u[n]$和 $x_2[n]=2u[n]$时，在 $0\leqslant n\leqslant 30$ 内的 $y[n]$。分别定义由这两个输入产生的输出是 $y_1[n]$和 $y_2[n]$。利用 stem 展示这两个输出。利用 stem 画出$(2y_1[n]-y_2[n])$。已知(1.6)式是

一个线性差分方程,为什么这个差不是恒为零?

(d) 由(1.6)式描述的因果系统是BIBO(有界输入有界输出)稳定的,只要$|a|<1$。这类稳定系统的一个性质就是对于足够大的n,初始条件的影响是不重要的。假设$a=1/2$,x向量包含在$0\leq n\leq 30$内的$x[n]=u[n]$。在假定$y[-1]=0$和$y[-1]=1/2$的两种情况下,计算$0\leq n\leq 30$内的两个输出信号。利用stem展示出这两个响应,它们的差异怎样?

1.6 连续时间复指数信号Ⓢ

在开始这个练习之前,强烈地鼓励你去掌握在Student Edition of MATLAB手册中所包含的Symbolic Math Toolbox的内容。Symbolic Math Toolbox中的函数可以用符号而不是数值式地来表示、处理和分析连续时间信号与系统。作为一个例子,考虑具有形式为e^{st}的连续时间复指数信号,这里s是一个复标量。复指数信号在分析信号与系统中是特别有用的,因为它们形成了一大类信号的基本构造单元。能够表示成复指数信号之和的两个很熟悉的信号就是正弦和余弦信号,即将$s=\pm i\omega t$,可得

$$\cos(\omega t)=\frac{1}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}) \tag{1.7}$$

$$\sin(\omega t)=\frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}) \tag{1.8}$$

在这个练习中将要求用Symbolic Math Toolbox表示某些基本复指数和正弦信号,利用ezplot画出这些信号,ezplot是Symbolic Math Toolbox中的画图子程序。

基本题

(a) 考虑连续时间正弦信号

$$x(t)=\sin(2\pi t/T)$$

利用执行

```
≫ x=sym('sin(2*pi*t/T)');
```

就创建MATLAB中的符号表达式表示$x(t)$。

x的变量是单一的字符串't'和'T'。函数ezplot用于对一个符号表达式画图仅限于1个变量,所以必须将$x(t)$的基波周期设置到某一特殊值。若想设置为$T=5$,就能按如下利用subs

```
≫x5=subs(x,5,'T');
```

于是,x5就是$\sin(2\pi t/5)$的一个符号表达式。

试对x5创建符号表达式,并用ezplot画出两个周期内的$\sin(2\pi t/5)$图(从$t=0$开始)。如果正确无误的话,应该与图1.2所示一致。

(b) 对下面信号创建符号表达式

$$x(t)=\cos(2\pi t/T)\sin(2\pi t/T)$$

这两个正弦信号应分别创建,然后利用symmul组合起来。对于$T=4,8$和16,利用ezplot画出在$0\leq t\leq 32$内的信号。什么是$x(t)$的基波周期(用T表示)?

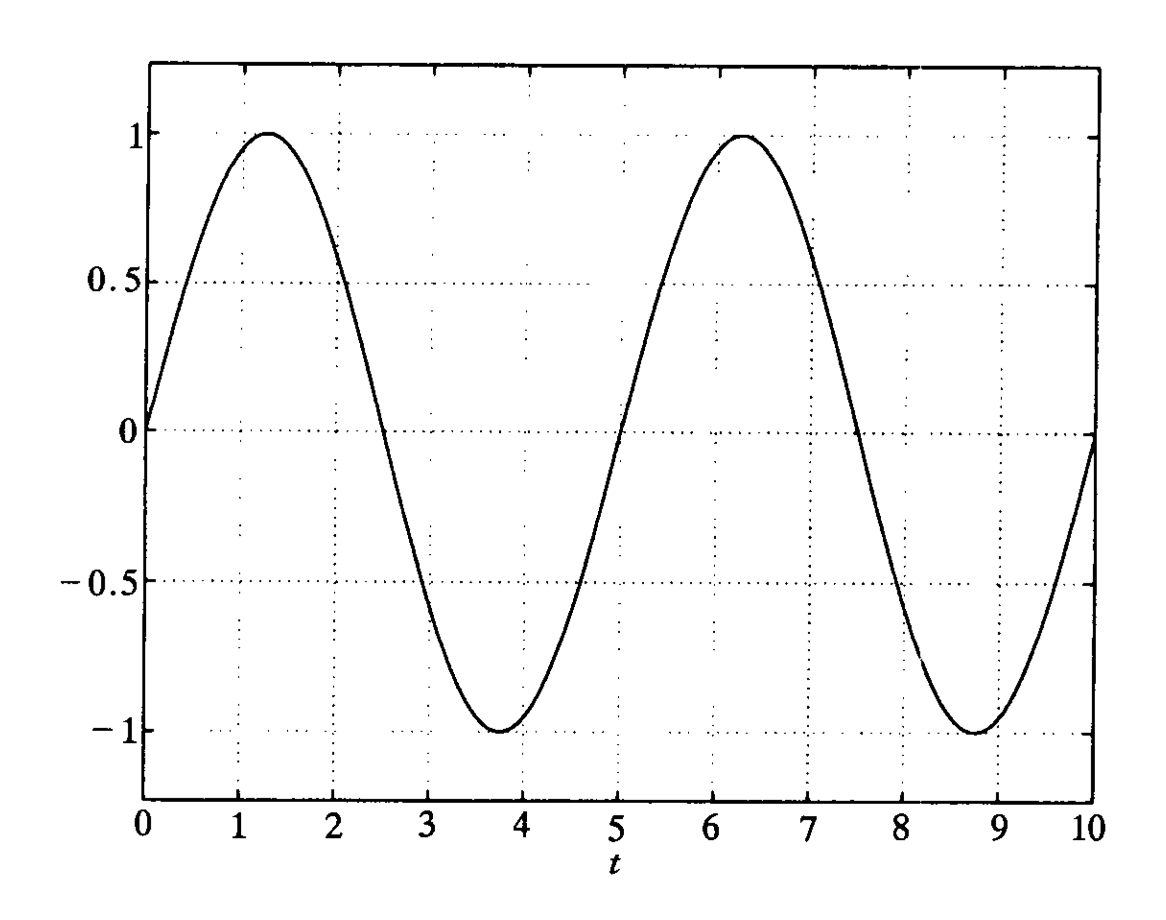


图 1.2　信号 $\sin(2\pi t/5)$的两个周期

中等题

某些欠阻尼系统对于单位冲激函数的响应能被建模为

$$e^{-at}\cos(2\pi t/T)u(t)$$

可能产生这种信号的一个实际系统的例子就是敲击一只铃所产生的声音,这个声音能用振幅随时间衰减的单音调来很好地近似。对于欠阻尼系统,品质因数①

$$Q = \frac{(2\pi/T)}{2a} \tag{1.9}$$

往往用于衡量该系统的谐振程度。谐振是冲激响应在实际消失之前振荡次数的一种度量。对于击铃这个例子,响应消失的时刻可以定义为该铃声不能听到的时刻。

(c) 对下面信号创建一个符号表达式

$$x(t) = e^{-at}\cos(2\pi t)$$

对于 $a=1/2, 1/4$ 和 $1/8$,利用 ezplot 确定 t_d,t_d 为 $|x(t)|$ 最后跨过 0.1 的时间,将 t_d 定义为该信号消失的时间。利用 ezplot 对每一个 a 值确定在该信号消失之前,有多少个完整的余弦周期出现。所出现的周期数目是正比于 Q 吗?

深入题

在下面习题中要写出 M 文件,用于提取一个复信号符号表达式的实部和虚部分量,或者幅值和相位分量。

(d) 将信号

① (1.9)式品质因数的定义是《Signals and Systems》(Oppenheim and Willsky)中定义的品质因数的近似,且仅当 $Ta \ll \pi$ 时成立。

$$x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t/16} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t/8}$$

的符号表达式存入 x 内。记住:在符号表达式内表示$\sqrt{-1}$是用'i'而不用'j'。函数 ezplot 不能直接用来画出 $x(t)$,因为 $x(t)$是一个复数信号,实部和虚部分量必须要提取出来,然后再分别画出它们。

(e) 写出函数 xr = sreal(x),它产生一个代表 $x(t)$实部的符号表达式 xr。如果这个函数工作正常的话,ezplot(xr)将画出 $x(t)$的实部。类似地,写出函数 xi = simag(x),它产生一个代表 $x(t)$虚部的符号表达式 xi。M 文件 sreal.m 的第 1 行应是

```
function xr = sreal(x)
```

然后能用 compose('real(x)',x)创建 $x(t)$实部分量的符号表达式。利用 ezplot 和已创建的函数在区间 $0 \leqslant t \leqslant 32$ 上画出 $x(t)$的实部和虚部分量的图。对每个分量用一张单独的图。什么是 $x(t)$的基波周期?

(f) 对包含 $x(t)$的符号表达式的 x,创建两个函数为 xm = sabs(x)和 xa = sangle(x),用这两个函数创建分别代表 $x(t)$的幅值和相位的符号表达式。

(g) 再次考虑在(d)中定义的 $x(t)$。利用 ezplot 和已创建的函数画出在区间 $0 \leqslant t \leqslant 32$ 上 $x(t)$的幅值和相位,对幅值和相位单独画图。为什么相位图是不连续的?

1.7 连续时间信号时间变量的变换Ⓢ

这个练习要用 MATLAB 的 Symbolic Math Toolbox 考查一下连续时间信号自变量各种变换的效果。具体来说,就是看一看在斜坡脉冲信号上的效果

$$f(t) = t(u(t) - u(t-2)) \tag{1.10}$$

式中 $u(t)$是单位阶跃信号

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

在 Student Edition of MATLAB 中的 Symbolic Math Toolbox 调用单位阶跃函数 Heaviside。函数 ezplot 仅仅能画那些既存在于 Symbolic Math 工具箱中,又存在于总 MATLAB 工具箱中的函数,而 Heaviside 函数是仅存在入 Symbolic Math Toolbox 中,所以就需要在你的工作目录下创建称之为 Heaviside.m 的 M 文件,这个文件的内容如下:

```
function f = Heaviside(t)
% HEAVISIDE Unit Step function
% f = Heaviside(t) returns a vector f the same size as
% the input vector, where each element of f is 1 if the
% corresponding element of t is greater than zero.
f = (t>0);
```

如果已经正确地定义出这个函数,就应该能够打印出下面的例子:

```
>> Heaviside([-1:0.2:1])
ans =
    0    0    0    0    0    1    1    1    1    1    1
```

中等题

(a) 利用 Heaviside 定义 f 为由(1.10)式给出的 $f(t)$ 的符号表达式，并利用 ezplot 画出这一符号表达式。

(b) 以下表达式定义一组由 $f(t)$ 表示的连续时间信号，对下列每一个信号，叙述一下是怎样与 $f(t)$ 关联的，如"延时 7"，"倒置然后超前 16"等。

$$g_1(t) = f(-t)$$
$$g_2(t) = f(t+1)$$
$$g_3(t) = f(t-3)$$
$$g_4(t) = f(-t+1)$$
$$g_5(t) = f(-2t+1)$$

(c) 利用 Symbolic Math Toolbox 函数 subs 和在上面(a)中已定义的符号表示式 f，以 MATLAB 调用 g1～g5 的方式定义符号表达式来表示(b)中的各信号，利用 ezplot 画出每个信号，并陈述所得图形是否与在(b)中所做出的估计相一致。

1.8 连续时间信号的能量和功率Ⓢ

对于一个连续时间信号 $x(t)$，其在区间 $-a \leqslant t \leqslant a$ 上的能量定义为

$$E_a = \int_{-a}^{a} |x(t)|^2 \mathrm{d}t, \qquad a \geqslant 0$$

式中 $|x|^2 = xx^*$，x^* 是 x 的复共轭。因此，对一个基波周期为 T 的周期信号而言，$E_{T/2}$ 就包括了该信号在一个周期内的信号能量。全部信号能量定义为

$$E_\infty = \lim_{a \to \infty} E_a$$

如果这个极限存在。虽然在实际中大多数信号都有有限能量，但是在信号与系统研究中作为概念上的工具所用的许多连续时间信号却不是这样，例如，任何周期信号都具有无限能量。对于这些信号，更为有用的度量是平均功率，它就是能量被时间区间的长度所除的结果。由此，在区间 $-a \leqslant t \leqslant a$ 内的平均功率是

$$P_a = \frac{E_a}{2a}, \qquad a > 0$$

而整个信号的平均功率为

$$P_\infty = \lim_{a \to \infty} P_a$$

如果这个极限存在。在这个习题中，要考虑对周期信号，P_∞ 和 $E_{T/2}$ 是如何关联的。

基本题

(a) 对下面每一个信号创建符号表达式：

$$x_1(t) = \cos(\pi t/5)$$
$$x_2(t) = \sin(\pi t/5)$$
$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t/3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}$$

这些表达式将用't'作为一个变量。当创建 $x_3(t)$的符号表达式时,可以用函数 symadd。

(b) 利用 ezplot 画出每个信号的两个周期,如果这个信号是复变信号,务必分别画出实部和虚部分量。图中的坐标轴应适当标注。**提示:**可以用 compose('real(x)',x)提取一个符号表达式的实部分量。如果已经做过练习 1.6,就能用在那里创建的函数。

中等题

(c) 定义 E1,E2 和 E3 分别为信号 $x_1(t)$,$x_2(t)$和 $x_3(t)$所包含的 E_a 的符号表达式。应该以'a'和'-a'作为积分上下限的符号表达式利用 int,同时为得到符号表达式 x 的复共轭,可以键入 subs(x,'-i','i')。

(d) 利用每个信号的符号表达式求该信号在单一周期内的能量 $E_{T/2}$。答案应是数字而不是表达式,或许需要利用 subs 和 numeric。对每一符号表达式,利用 ezplot 画出 E_a 作为 a,$0\leqslant a\leqslant 30$,的函数关系图。能量如何随区间长度的增加而变化? E_∞的期望值是什么?

(e) 定义 p1,p2 和 p3 分别为信号 $x_1(t)$,$x_2(t)$和 $x_3(t)$所包含的 P_a 的符号表达式。创建每一个符号表达式,并用 ezplot 展示在 $0.1\leqslant a\leqslant 60$ 上的 P_a。注意,对于 $a=0$,P_a 无定义。P_a 随 a 的增加,其特性如何? 从图中估计出每个信号的 P_∞。对每个信号,P_∞与$(E_{T/2})/T$比较的结果如何? 明确说明根据 P_∞和 $E_{T/2}$的定义,怎样本该就能预计到这一结果?

(f) 为什么会预期到 $x_1(t)$的 P_a 和 $x_2(t)$的 P_a 收敛到同一值? 利用 symadd 将符号表达式 p1 和 p2 相加,务必要借助于 simple 以尽量简化这个表达式。你得到的表达式是什么? 说明这一结果如何本来就能预期到。

第 2 章

线性时不变系统

本章的练习覆盖了许多线性时不变(LTI)系统的性质。第 1 章的练习给出了涉及用 MATLAB 表示信号与系统一些基本概念的入门性介绍，这些都为从数值上和符号表达式上进行处理建立了必要的工具，并学到了很多有关 MATLAB 函数和变量表达式的基本句法知识。这样为基本的信号与系统的很多性质提供了一些实践的经验。其中的两个性质，线性和时不定性，将是本章的主要关注点。在离散时间情况下，线性性质使得能够利用系统对信号 $\delta[n-k]$(对全部 k)的响应 $h_k[n]$来完全表征一个系统；如果一个线性系统也是时不变的，那么响应 $h_k[n]$就满足 $h_k[n]=h[n-k]$。因此，线性和时不变性的结合就能够由系统的脉冲响应来完全表征一个系统，因为系统的输出 $y[n]$是通过如下卷积和与输入 $x[n]$相联系的：

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[n-m]x[m] \tag{2.1}$$

相类似，连续时间 LTI 系统的输出 $y(t)$是通过如下卷积积分与输入 $x(t)$和单位冲激响应 $h(t)$相联系的

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.2}$$

MATLAB 的数值计算能力能够有助于理解卷积运算的几个基本性质。本章的前 3 节内容说明如何利用 MATLAB 函数 conv，filter 和 lsim 计算 LTI 系统的输出。有些练习要包括涉及连续时间系统数值近似问题；另外一些练习(如练习 2.4 和 2.5)要更为详细地研究离散时间 LTI 系统的多个性质。练习 2.6 将学习如何利用 MATLAB 实现某些具有有限长脉冲响应的非因果 LTI 系统。练习 2.7 要讨论当一个信号是很长时实现离散卷积的一种方法。练习 2.8 讨论连续时间卷积的一种数值近似方法。练习 2.9 将会学到连续时间系统的“脉冲响应”如何能用来表征系统的性能。最后，练习 2.10 要学到如何利用逆滤波完成语音信号的回声消除。

2.1 MATLAB 函数 conv

MATLAB 函数 conv 计算下面卷积和：

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]x[n-m] \tag{2.3}$$

这里假设 $x[n]$和 $h[n]$都是有限长序列。如果 $x[n]$仅在 $n_x\leqslant n\leqslant n_x+N_x-1$ 区间内为非

零,而 $h[n]$仅在 $n_h \leqslant n \leqslant n_h+N_h-1$ 上为非零,那么 $y[n]$就仅在

$$(n_x+n_h) \leqslant n \leqslant (n_x+n_h)+N_x+N_h-2 \tag{2.4}$$

内为非零值。这表明 conv 只需要在上述区间内计算 $y[n]$的 N_x+N_h-1 个样本值。如果 x 是一个包含在区间 $n_x \leqslant n \leqslant n_x+N_x-1$ 上的 $x[n]$的 N_x 维向量,而 h 是包含 $h[n]$在区间 $n_h \leqslant n \leqslant n_h+N_h-1$上的 N_h 维向量,那么 y = conv(h,x)将在 y 中产生在(2.4)式区间内的 N_x+N_h-1 个 $y[n]$的样本值。然而,conv 并不产生存储在 y 中的 $y[n]$样本的序号,而这个序号是有意义的,因为 x 和 h 的区间都不是 conv 的输入区间。这样就应负责保持这些序号之间的联系。这个练习要说明怎么做才能达到这一点。

(a) 考虑如下有限长信号

$$x[n]=\begin{cases}1, 0 \leqslant n \leqslant 5 \\ 0, \quad 其余\ n\end{cases} \tag{2.5}$$

用解析方法计算 $y[n]=x[n]*x[n]$。

(b) 利用 conv 计算 $y[n]=x[n]*x[n]$的非零样本值,并将这些样本存入向量 y 中。第一步应该是定义包含在 $0 \leqslant n \leqslant 5$ 区间内的 $x[n]$样本的向量 x,同时构造一个标号向量 ny,这里 ny(i)包含存在向量 y 中的第 i 个元素的$y[n]$样本的序号,也即 y(i)=y[ny(i)]。例如 ny(1)应包含 n_x+n_x,n_x 是$x[n]$的第 1 个非零值的序号。利用 stem(ny,y)画出所得结果,并确信该图与由(a)所求出的信号是一致的。作为检验,所得图应与图 2.1 一致。

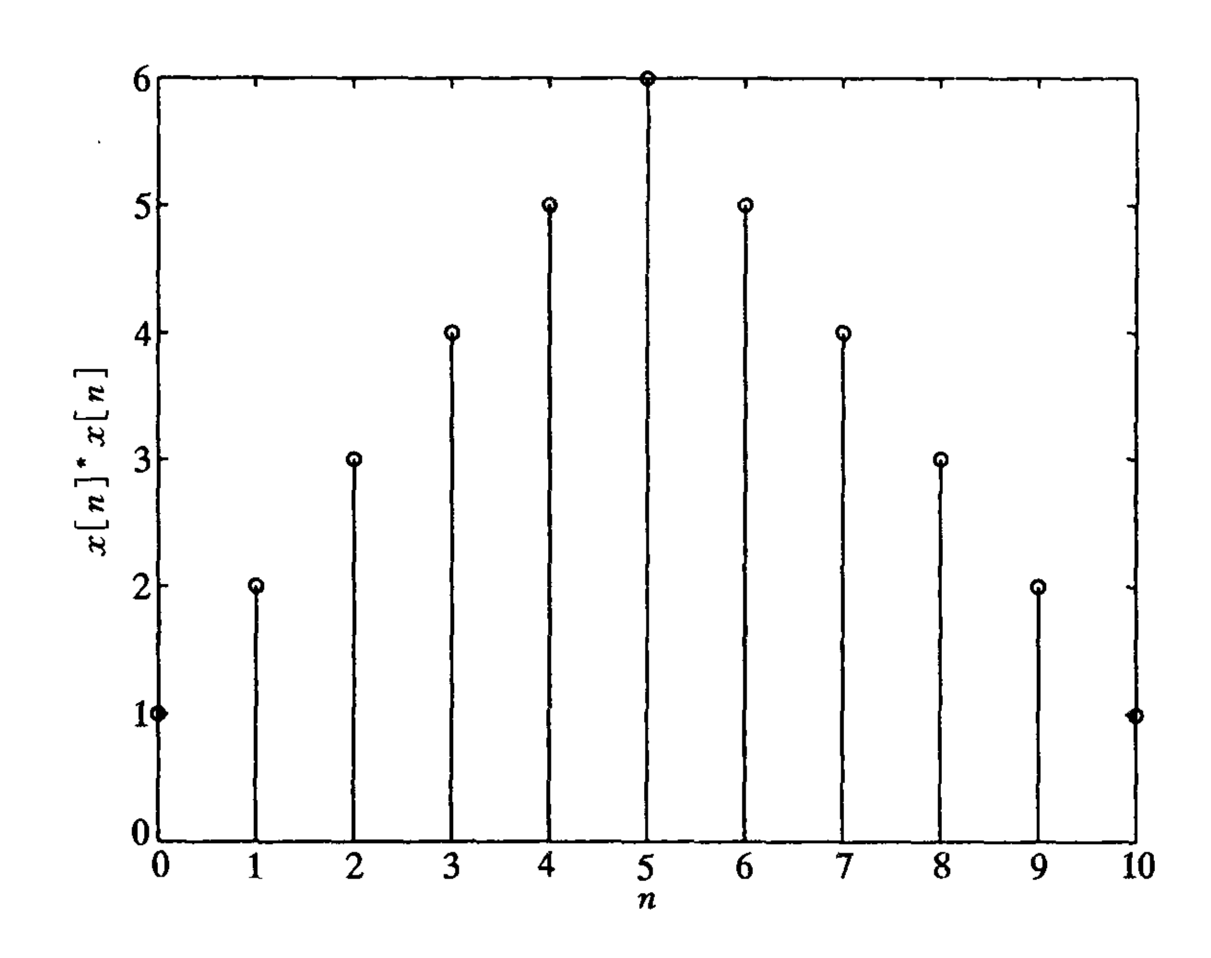


图 2.1 信号 $y[n]=x[n]*x[n]$的图形

(c) 考虑下面有限长信号:

$$h[n]=\begin{cases}n, 0 \leqslant n \leqslant 5 \\ 0, \quad 其余\ n\end{cases} \tag{2.6}$$

用解析方法计算 $y[n]=x[n]*h[n]$。接下来利用 conv 计算 y,这里第一步应该定义在

$0 \leqslant n \leqslant 5$ 区间上包含 $h[n]$ 的向量 h。再次构造向量 ny，它包含了一个 n 的区间，在这个区间内 y 包含了 $y[n]$。用 stem(ny,y)画出这一结果。作为验证，这个图应与图 2.2 以及解析导出的结果一致。

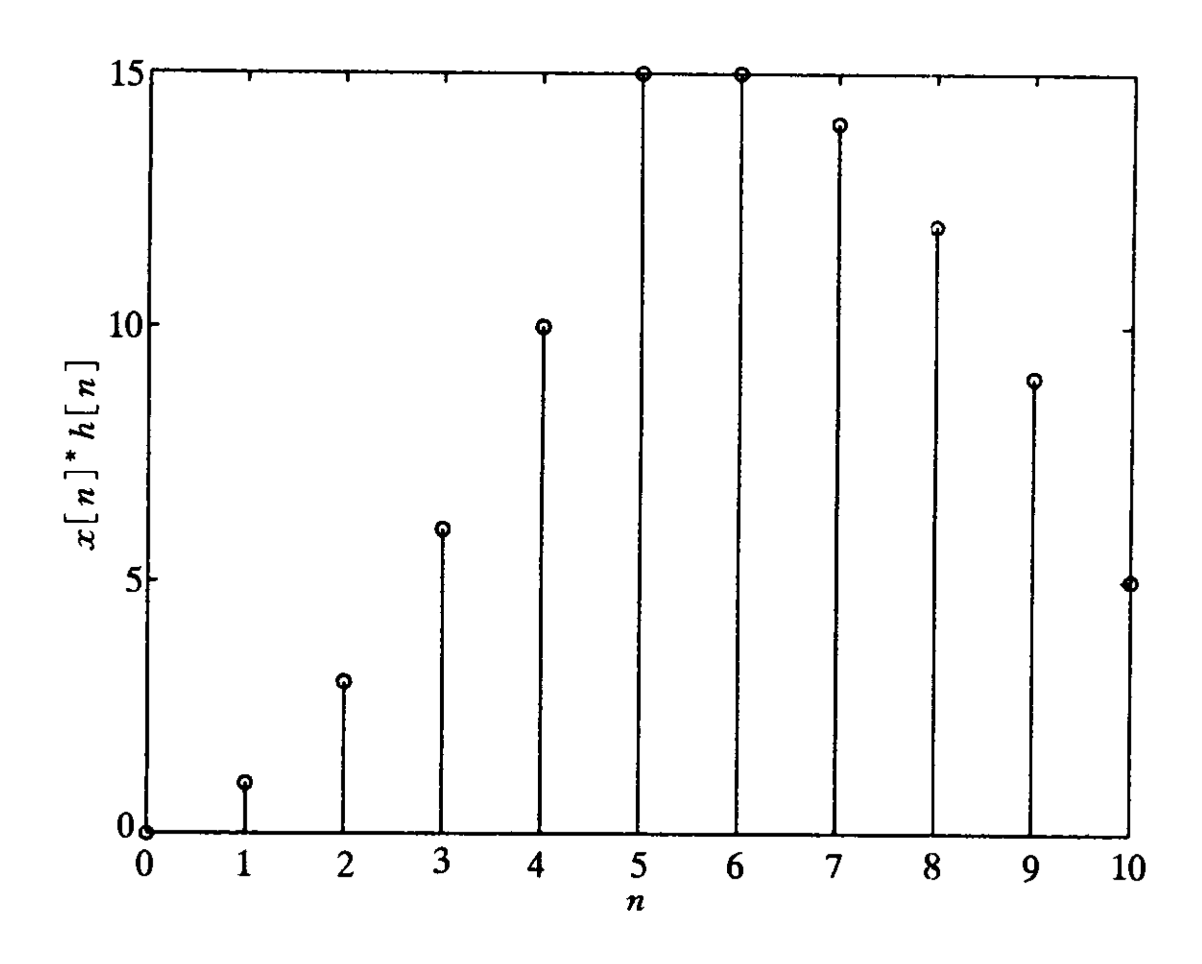


图 2.2　信号 $y[n]=x[n]*h[n]$ 的图形

对于刚才研究的这个例子（即用 conv 实现 $y[n]=x[n]*h[n]$），信号 $h[n]$ 能看作一个线性时不变系统的单位脉冲响应，$x[n]$ 是该系统的输入，$y[n]$ 是系统的输出。由于 $n<0$，$h[n]=0$，因此该系统是因果的。然而，conv 也能用于实现非因果的 LTI 系统，这时仍然必须要仔细保持住 $x[n]$，$h[n]$ 和 $y[n]$ 之间序号的联系。例如考虑单位脉冲响应为 $h[n+5]$ 的系统，这里 $h[n]$ 由(2.6)式定义。

(d) 将 $y_2[n]=x[n]*h[n+5]$ 与在(c)中导出的信号 $y[n]$ 比较，结果怎样？

(e) 利用 conv 计算 $y_2[n]$ 的非零样本，并将这些样本存入向量 y2 中，如果正确无误的话，这个向量应该与在(c)中计算出的向量 y 是一样的。唯一的差别是存在 y2 中的这些值的序号改变了。确定这组序号，并存入向量 ny2 中，利用 stem(ny2,y2)画出 $y_2[n]$，所得结果应该与图 2.3 一致。

2.2　MATLAB 函数 filter

filter 命令计算由线性常系数差分方程表征的因果 LTI 系统在某一给定输入时的输出。具体地说，考虑一个满足下列差分方程的 LTI 系统：

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \tag{2.7}$$

式中 $x[n]$ 是系统输入，$y[n]$ 是系统输出。若 x 是包含在区间 $n_x \leqslant n \leqslant n_x + N_x - 1$ 内的 $x[n]$ 的一个 MATLAB 向量，而向量 a 和 b 包含系数 a_k 和 b_k，那么 y=filter(b,a,x)就会得出

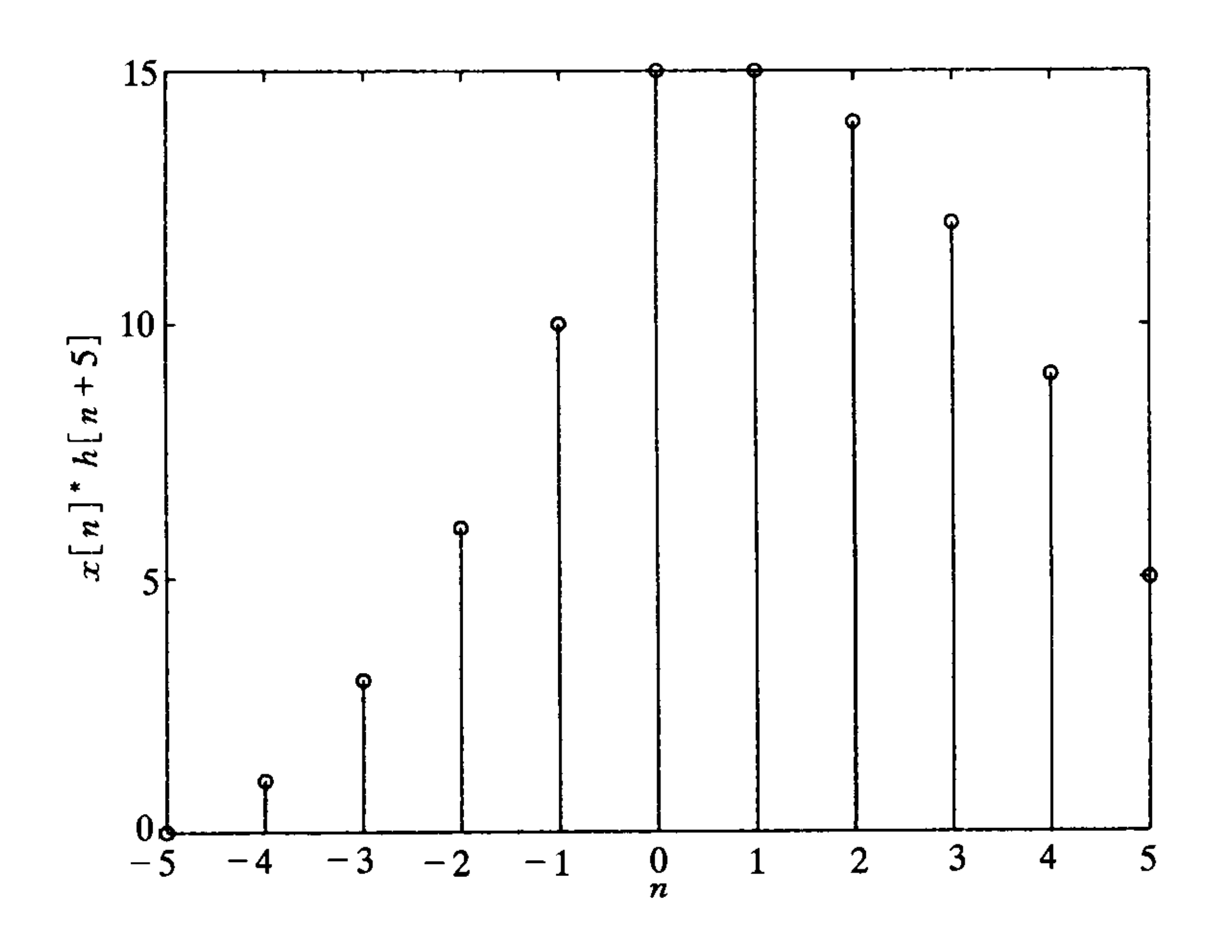


图 2.3　信号 $y_2[n]=x[n]*h[n+5]$的图形

满足下面差分方程的因果 LTI 系统的输出：

$$\sum_{k=0}^{K} a(k+1)y(n-k)=\sum_{m=0}^{M} b(m+1)x(n-m) \tag{2.8}$$

注意，$a(k+1)=a_k$ 和 $b(m+1)=b_m$，因为 MATLAB 要求所有的向量序号都从 1 开始。例如，为了表示由差分方程 $y[n]+2y[n-1]=x[n]-3x[n-1]$表征的系统，就应该定义这些向量为 a=[1　2]和 b=[1　−3]。

由 filter 产生的输出向量 y 包含了 $y[n]$在与向量 x 中所在样本同一区间上的样本，即 $n_x\leqslant n\leqslant n_x+N_x-1$，以使得两个向量 x 和 y 中都包含了 N_x 个样本。然而值得注意的是，filter 需要的 $x[n]$是在 $n_x-M\leqslant n\leqslant n_x-1$，$y[n]$是在 $n_x-K\leqslant n\leqslant n_x-1$，以便计算出第 1 个输出值 $y[n_x]$。函数 filter 假设这些样本全都是等于零。

(a) 定义描述由 $y[n]=0.5x[n]+x[n-1]+2x[n-2]$表征的因果 LTI 系统的系数向量 a1 和 b1。

(b) 定义描述由 $y(n)=0.8y[n-1]+2x[n]$表征的因果 LTI 系统的系数向量 a2 和 b2。

(c) 定义描述由 $y[n]-0.8y[n-1]=2x[n-1]$表征的因果 LTI 系统的系数向量 a3 和 b3。

(d) 对于以上定义的 3 个系统中的每一个，利用 filter 计算出输入信号 $x[n]=nu[n]$时，在 $1\leqslant n\leqslant 4$ 区间内的响应 $y[n]$。一开始应定义向量 x=[1　2　3　4]，它包含了 $x[n]$在区间 $1\leqslant n\leqslant 4$ 内的样本。利用 filter 后，每个系统的结果如下所示：

```
≫ x=[1 2 3 4];
≫ y1=filter(b1,a1,x)
≫ y1=
  0.5000    2.0000    5.5000    9.0000
≫ y2=filter(b2,a2,x)
```

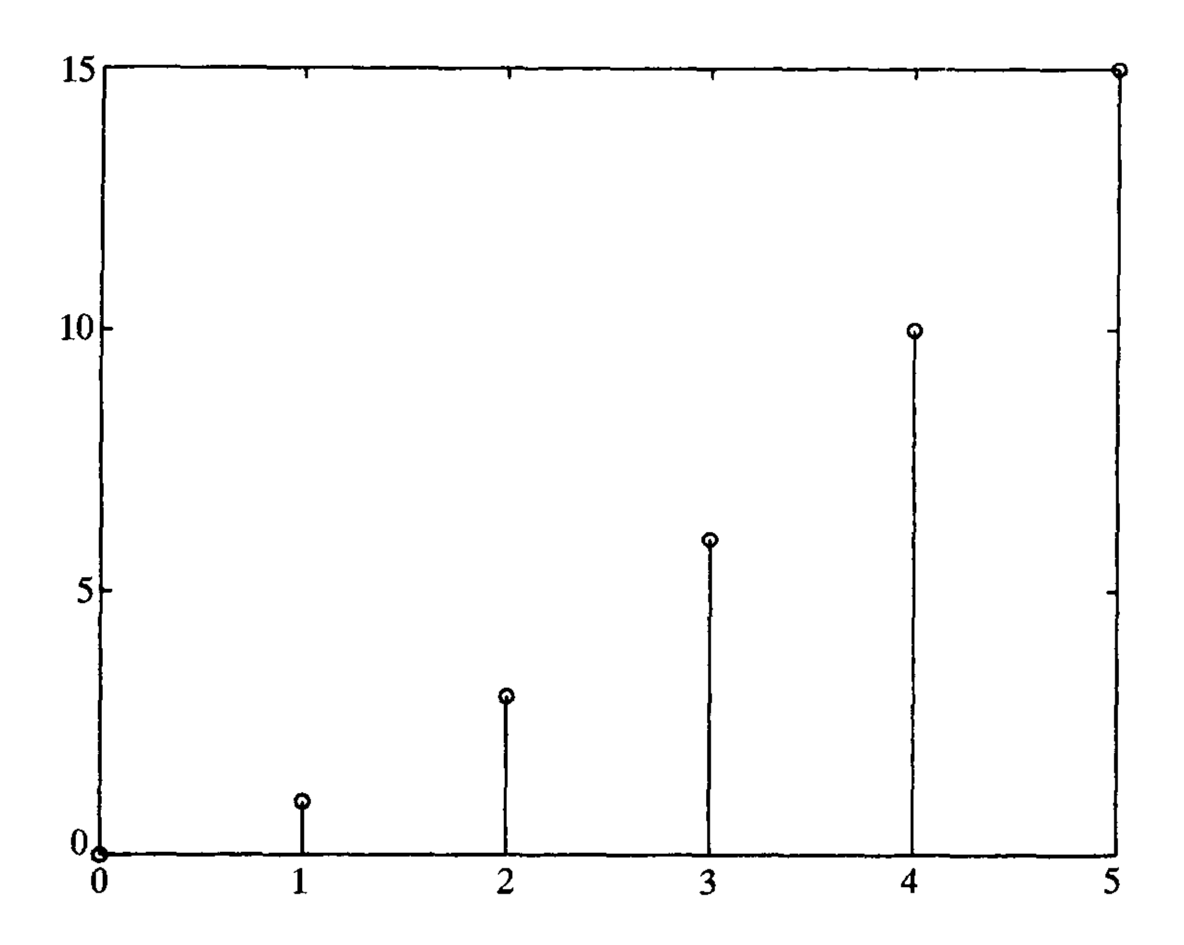


图 2.4 在区间 $0\leqslant n\leqslant 5$ 上，信号 $y[n]=x[n]*h[n]$ 的图形

当以 $m'=m+L$ 置换后，有

$$\begin{aligned}y_2[n] &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} h[m']x[n-(m'-L)] \\ &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} h[m']x[(n+L)-m'] \\ &= y[n+L]\end{aligned}$$

换句话说，在脉冲响应上超前（或对 $L<0$ 是延时）L 个样本只是在输出上也随着超前 L 个样本。因此，如果 x 包含的是在区间 $0\leqslant n\leqslant N_x-1$ 内的 $x[n]$，而 h 是在区间 $-L\leqslant n\leqslant N_h-L$ 内的 $h[n]$，那么 y=filter(h,1,x) 一定产生一个在区间 $-L\leqslant n\leqslant N_x-1-L$ 内的 $y[n]$。注意：y 仍然与 x 具有相同的样本个数，只是由 y 所代表的样本超前 $3L$ 个样本。

(h) 考虑脉冲响应 $h_2[n]=h[n+5]$，这里 $h[n]$ 由(2.6)式定义。将在区间 $-5\leqslant n\leqslant 0$ 上的 $h_2[n]$ 存入向量 h2 中。

(i) 执行命令 y2=filter(h2,1,x)，并创建向量 ny2，它包含了存在向量 y2 中的 $y_2[n]=h_2[n]*x[n]$ 样本的序号。用 stem(ny2,y2) 画出所得结果。该结果与图 2.4 比较如何？

(j) 创建向量 x2，以使得 filter(h2,1,x2) 产生 $y_2[n]$ 的全部非零样本。

2.3 MATLAB 函数 lsim（用于微分方程）

函数 lsim 能用于对由下列线性常系数微分方程表征的连续时间因果 LTI 系统的输出进行仿真

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} \tag{2.11}$$

为了利用 lsim,系数 a_k 和 b_m 必须被存入 MATLAB 向量 a 和 b 中,并且在序号 k 和 m 上以递降的次序存入①。将(2.11)式用向量 a 和 b 重新写成

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{a}(N+1-k)\frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{m=0}^{M} \mathrm{b}(M+1-m)\frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} \tag{2.12}$$

注意,向量 a 必须包含 $N+1$ 个元素,可以用对 a 补零的办法来处理系数 a_k 为零的那些系数。相类似,向量 b 也必须含有 $M+1$ 个元素。用在(2.12)式中所定义的 a 和 b,执行

```
>> y=lsim(b,a,x,t);
```

就仿真出由向量 x 和 t 所给出的输入信号时,(2.11)式系统的响应。向量 t 包含了输入和输出的时间样本,向量 x 包含了在向量 t 中每一时刻上 $x(t)$ 的值,而向量 y 则为在向量 t 中每一时刻上输出 $y(t)$ 的仿真值。这个仿真值的准确程度取决于 x 和 t 代表真正的函数 $x(t)$ 有多精确。

虽然这一节并没有提到用 lsim 计算 y 的数值方法,但是重要的是要知道 lsim 是怎样解释输入 x 和 t 的。基本上 lsim 解释这一对 t,x 是非常像 plot 所做的那样。例如,考虑由下列所得到的图:

```
>> t=[0 1 2 5 8 9 10];
>> x=[0 0 0 3 0 0];
>> plot(t,x)
```

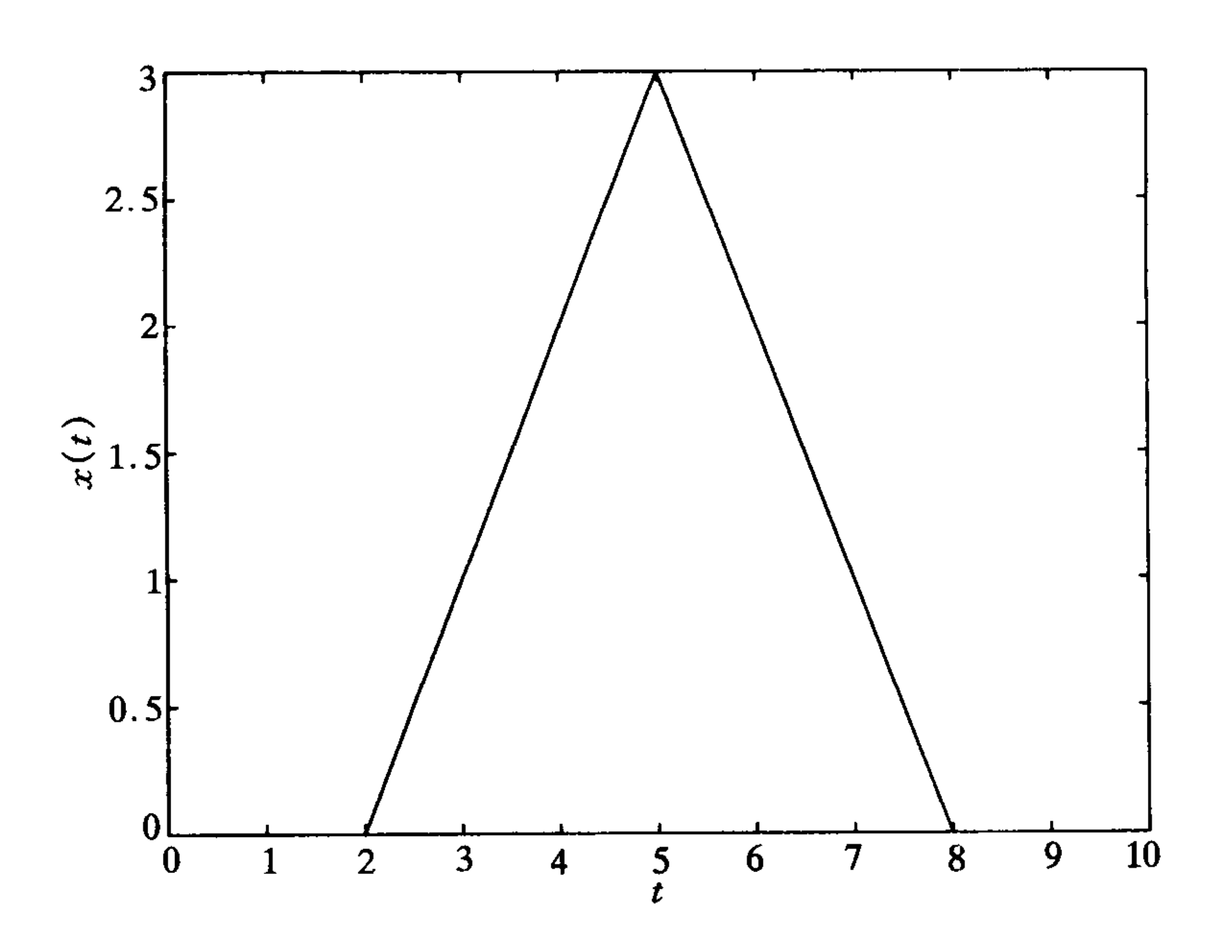


图 2.5 用 plot(t,x)的线性内插就类似于用 lsim 创建它的输入函数

由图 2.5 给出。函数 lsim(b,a,x,t)将考虑 $x(t)$ 是在 $0\leqslant t\leqslant 10$ 内等于

---

① 在 2.2 节注意到,对于函数 filter,包含 a_k 和 b_m 的向量 a 和 b 是以序号 k 和 m 的递增次序存入的,而不是在 lsim 中所用的递降次序。

$$x(t)=\begin{cases}3-|t-5|, & 2\leqslant t\leqslant 8\\ 0, & \text{其余 } t\end{cases}$$

因此,由这对[t(n),x(n)]所给定的点的线性内插就是连续时间函数 $x(t)$,而 lsim 则用这个 $x(t)$ 作为(2.12)式系统的输入。

考虑由下列一阶微分方程所描述的因果 LTI 系统:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}y(t)+x(t) \tag{2.13}$$

该系统的阶跃响应可以先定义出如下的输入阶跃函数而计算出来:

```
≫ t=[0:10];
≫ x=ones(1,length(t));
```

然后,仿真的阶跃响应就可计算出来,并画出这个响应,这只要执行

```
≫ b=1;
≫ a=[1  0.5];
≫ s=lsim(b,a,x,t);
≫ plot(t,s,'y--')
```

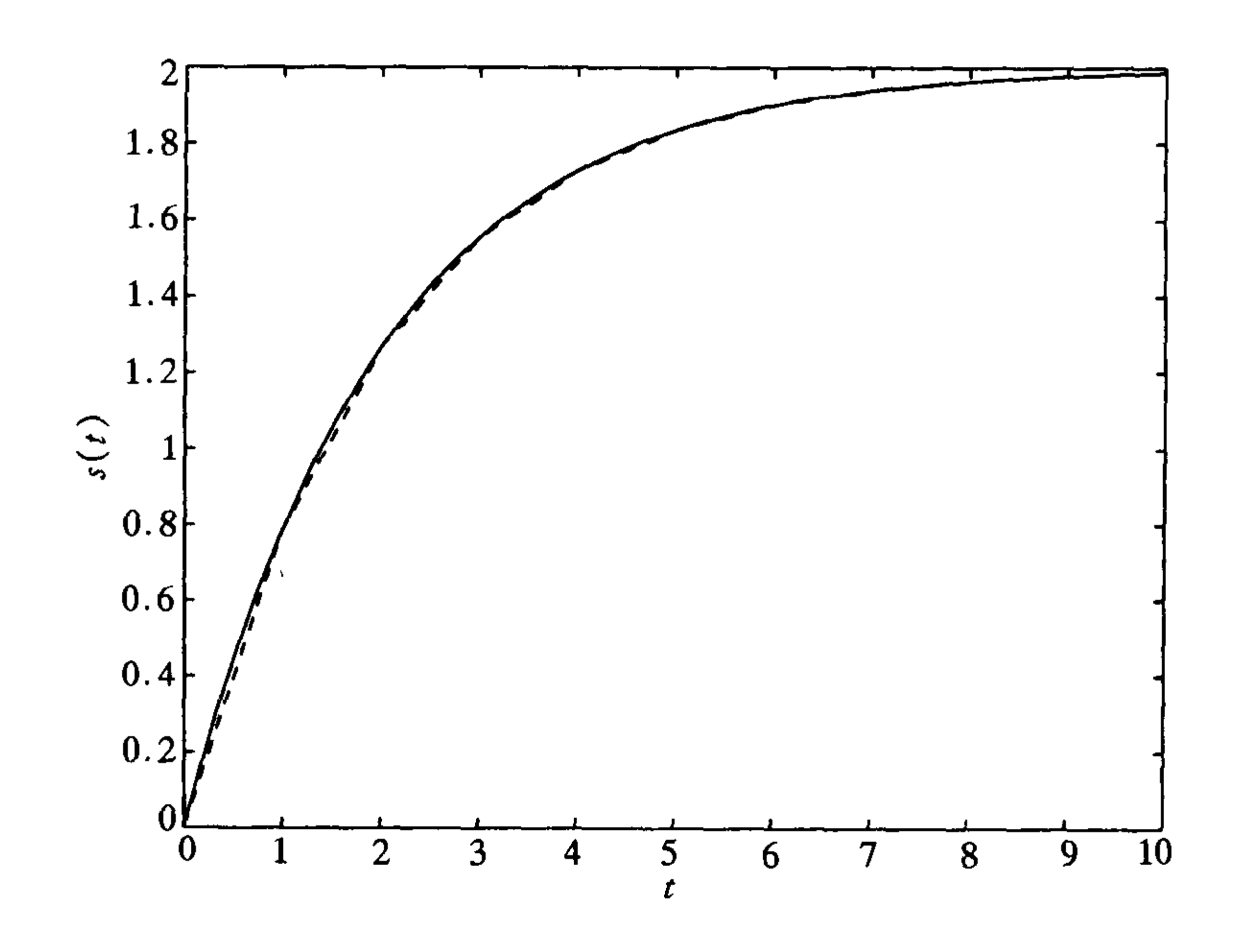


图 2.6 对于由(2.13)式所描述的因果 LTI 系统,虚线是用 lsim 计算出的阶跃响应,实线是真正的阶跃响应

如同 2.6 所示。图中实线是代表真正的阶跃响应

$$s(t)=2(1-\mathrm{e}^{-t/2})u(t) \tag{2.14}$$

应该注意到,在每个 t 值点上,由 lsim 计算出的阶跃响应基本上与真正的阶跃响应是一致的,唯一的差别是在由 plot 所产生的内插上。如果在 t 中的样本选取得更加密集的话,比如 t=[0:0.1:10],那么函数 lsim 将产生 $s(t)$ 更多的样本。

(a) 利用 lsim 计算由下面微分方程描述的因果 LTI 系统,对输入 $x(t)=u(t-2)$ 的响应

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-2y(t)+x(t) \tag{2.15}$$

这个响应应该看起来像图2.7那样，该图是用 t=[0:0.5:10]计算出来的。

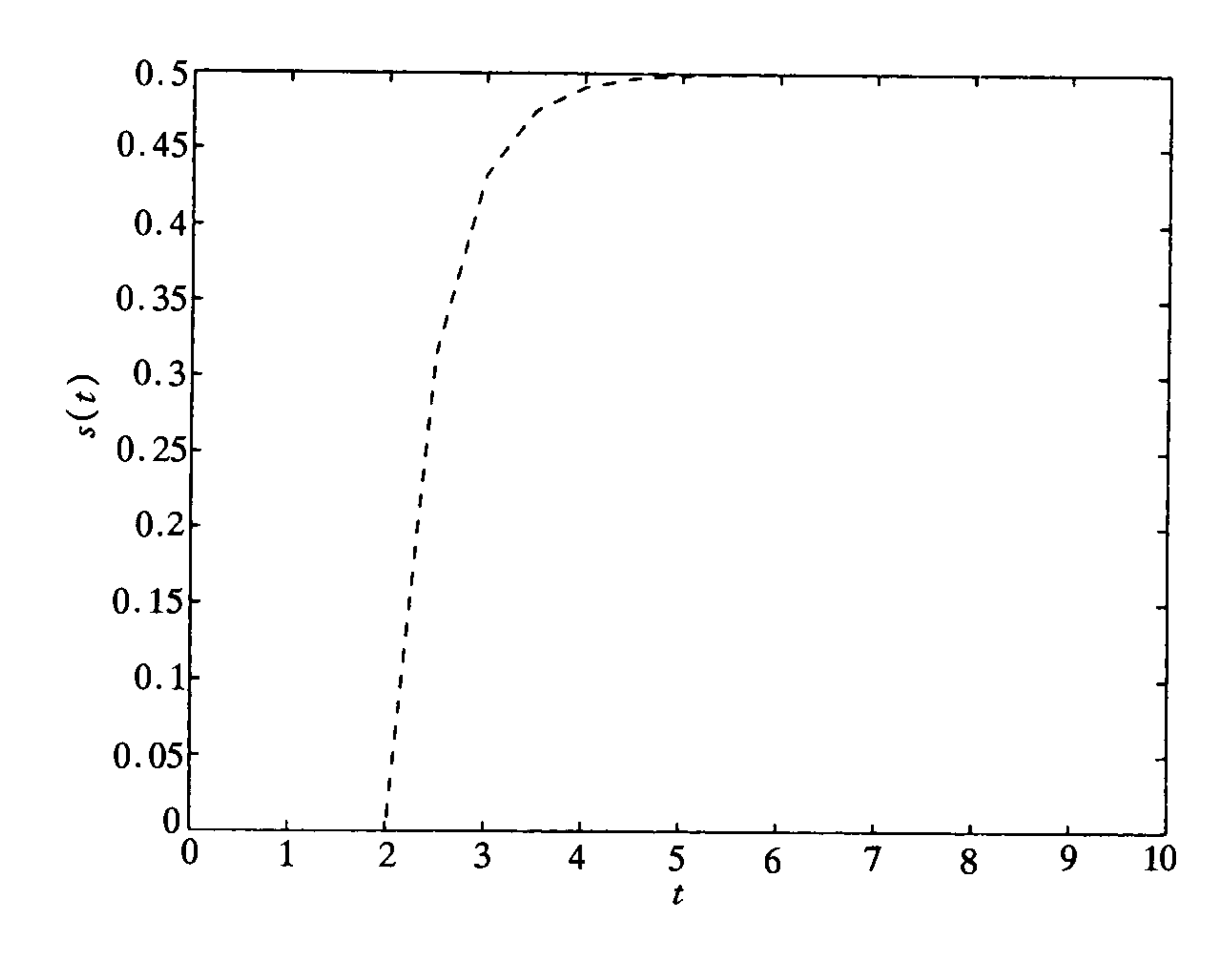


图2.7　当时间向量为 t=[0:0.5:10]时，用 lsim 计算出的(2.15)式系统对 $u(t-2)$的响应

虽然 lsim 能够仿真(2.11)式的系统对任何能用线性内插近似的输入的响应，但是函数 impulse 和 step 可以用于计算这类系统的单位脉冲和单位阶跃响应。利用向量 t,b 和 a 而定义为

```
≫ t=[0:1:10];
≫ b=1;
≫ a=[1  0.5];
```

然后键入

```
≫ s=step(b,a,t);
≫ h=impulse(b,a,t);
```

将会分别在 s 和 h 中得到单位阶跃和单位脉冲响应。应该注意，对于 step 和 impulse 的输入 a 和 b 具有与 lsim 要求相同的格式。

(b) 用 step 和 impulse 计算由(2.13)式所表征的因果 LTI 系统的单位阶跃和单位脉冲响应。将用 step 计算出的单位阶跃响应与图2.6作比较。将用 impulse 所得到的信号与(2.14)式的导数所给出的真正脉冲响应作比较。

2.4　离散时间 LTI 系统的性质

在这个练习中，将对一组特定的信号检验卷积的交换律、结合律和分配律性质。另外还要

考察这些性质对于 LTI 系统的级联和并联意味着什么。本练习中的习题都是在已熟悉并熟练掌握在 2.1 节所讨论的 conv 函数的基础上进行的。尽管练习中的习题都是针对离散时间系统，但是对连续时间系统也具有相同的性质。

基本题

(a) 本练习中的许多习题都将用到下面 3 个信号：

$$x_1[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

$$h_1[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ -1, & n=1\\ 3, & n=2\\ 1, & n=4\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

$$h_2[n]=\begin{cases}2, & n=1\\ 5, & n=2\\ 4, & n=3\\ -1, & n=4\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

定义代表在区间 $0\leqslant n\leqslant 9$ 内的 $x_1[n]$ 的 MATLAB 向量 x1，以及代表在区间 $0\leqslant n\leqslant 4$ 内的 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 的向量 h1 和 h2。同时，定 nx1 和 nh1 为这些信号合适的标号向量。利用 stem 画出这些信号并作适当标注。

(b) 交换律性质是说卷积结果与被卷积信号的次序无关。这意味着，具有单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统，在输入为 $x[n]$ 时所得到的输出与单位脉冲响应为 $x[n]$，在输入为 $h[n]$ 时所得到的输出是一样的。利用 conv 以及 h1 和 x1 验证这一性质。conv 的输出是与卷积次序无关吗？

(c) 卷积也具有分配律性质，这指的是

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1(n)+x[n]*h_2[n]$$

这意味着，两个并联连接的 LIT 系统的输出与单位脉冲响应是该并联系统单位脉冲响应之和的系统输出是相同的，图 2.8 说明了这一性质。

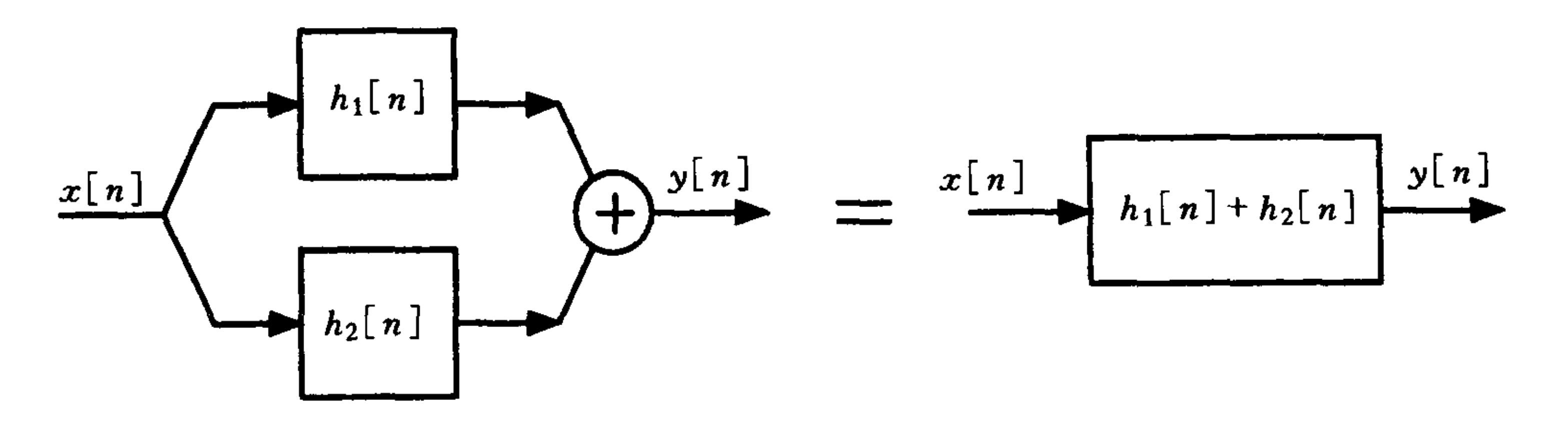


图 2.8 卷积的分配律性质

利用 x1，h1 和 h2 验证分配律性质。当输入为 $x_1[n]$时，用单位脉冲响应 $h_1[n]$和 $h_2[n]$计算 LTI 系统输出的和。将结果与输入为 $x_1[n]$，单位脉冲响应为 $h_1[n]+h_2[n]$的 LTI 系统的输出进行比较。这两种方法计算出来的输出相同吗?

(d) 卷积也具有结合律性质，即

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$$

这个性质意味着，用 LTI 系统的级联处理一个信号所得结果等效于用一个系统来处理，该系统的单位脉冲响应是全部级联系统中单个脉冲响应的卷积。图 2.9 用两个系统的级联来说明这一性质。

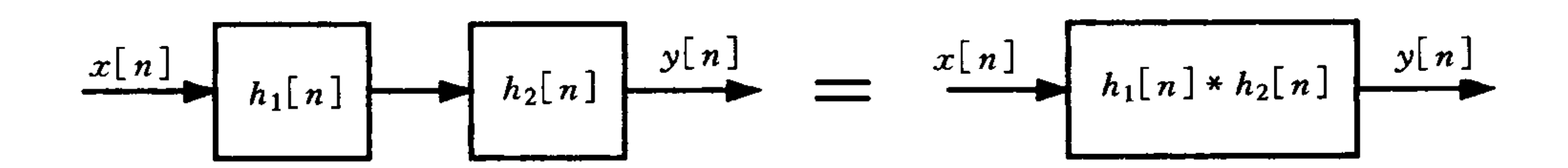


图 2.9　卷积的结合律性质

采用下列步骤，用 x1，h1 和 h2 验证结合律性质：

- 令 $w[n]$为图 2.9 中单位脉冲响应为 $h_1[n]$的 LTI 系统的输出，用 $x_1[n]$和 $h_1[n]$的卷积计算 $w[n]$。
- 将 $w[n]$与 $h_2[n]$卷积计算整个系统的输出 $y_{d1}[n]$。
- 求单位脉冲响应 $h_{\text{series}}[n]=h_1[n]*h_2[n]$。
- 将 $x_1[n]$与 h_{series}卷积求得输出 $y_{d2}[n]$。

试比较 $y_{d1}[n]$和 $y_{d2}[n]$。当用单个脉冲响应处理 $x_1[n]$时和用 $h_{\text{series}}[n]$处理时所得结果一样吗?

中等题

(e) 假定两个系统有单位脉冲响应为 $h_{e1}=h_1[n]$和 $h_{e2}=h_1[n-n_0]$，这里 $h_1[n]$是在(a)中所定义的同一信号，而 n_0 是一个整数，令 $y_{e1}[n]$和 $y_{e2}[n]$是这两个系统当输入为 $x[n]$时的输出。利用交换律性质证明：如果每个系统的输入与单位脉冲响应互换的话，输出是相同的。请注意，一旦这样实现的话，那么这两个系统就有相同的单位脉冲响应，而输入则一个是另一个的延时。基于这一点和时不变性，证明：
$y_{e2}[n]=y_{e1}[n-n_0]$。利用 MATLAB 确认当 $n_0=2$，输入 $x[n]$为(a)中所定义的信号 $x_1[n]$时所得结果。

(f) 考虑以级联连接的两个系统，分别称系统 1 和系统 2。假设系统 1 是无记忆的，且其输入/输出关系为 $y[n]=(n+1)x[n]$；系统 2 是 LTI 系统，其单位脉冲响应为 $h_{f2}[n]=h_1[n]$，$h_1[n]$如(a)中所定义。采用下列步骤研究这两个系统的级联是否满足卷积的结合律性质：

- 令 $w[n]$为系统 1 在输入为 $x_1[n]$(如前定义)时的输出，利用 nx1 和 x1，再用逐项相乘算子 .* 定义一个 MATLAB 向量 w 来表示 $w[n]$。
- 用 $w[n]$作为系统 2 的输入，令其输出为 $y_{f1}[n]$。利用 w 和 h1 用 MATLAB 计算 yf1。
- 令 $h_{f1}[n]$是系统 1 在输入为 $\delta(t)$时的输出，定义一个向量 hf1 代表在区间 $0\leqslant n\leqslant 4$ 内

的 $h_{f1}[n]$。

- 令 $h_{\text{series}}[n]=h_{f1}[n]*h_{f2}[n]$，计算出一个向量 hseries 来代表这个信号。
- 令 $y_{f2}[n]$是单位脉冲响应为 $h_{\text{series}}[n]$的 LTI 系统当输入为 $x_1[n]$时的输出，利用 hseries 和 x1 用 MATLAB 计算 yf2。

$y_{f1}[n]=y_{f2}[n]$吗？若是，为什么会这样？若不是，这表明，用系统 1 和系统 2 级联来处理信号，其结果不等于用单一系统进行处理，而该单一系统的单位脉冲响应是系统 1 和系统 2 的单位脉冲响应的卷积。这违犯了在(d)所讨论的卷积结合律性质吗？

(g) 考虑系统 1 和系统 2 的并联连接。系统 1 是一个无记忆系统，其输入/输出关系由 $y[n]=x^2[n]$表征；系统 2 是一个 LTI 系统，其单位脉冲响应如(a)所定义的 $h_{g2}[n]=h_2[n]$。现用下列步骤想要研究这两个系统的并联是否满足卷积的分配律性质：

- 令 $y_{ga}[n]$是系统 1 在输入 $x_g[n]=2\delta[n]$时的输出，定义 xg 代表在区间 $0\leqslant n\leqslant 4$ 上的这个输入的向量，利用 xg 和逐项取幂算子.^定义一个 MATLAB 向量 yga 来代表 $y_{ga}[n]$。
- 令 $y_{gb}[n]$是系统 2 在输入为 $x_g[n]$时的输出，定义 ygb 代表这个信号。
- 令 $y_{g1}[n]$为 $y_{ga}[n]$和 $y_{gb}[n]$之和，定义向量 yg1 代表 $y_{g1}[n]$。注意，因为 yga 在长度上比 ygb 短，所以在将这两个向量相加之前，必须要将 yga 补若干个零值。
- 令 $h_{g1}[n]$是系统 1 在输入为 $\delta[n]$时的输出，定义 hg1 代表在区间 $0\leqslant n\leqslant 4$ 上的这个信号。
- 令 $h_{\text{parallel}}[n]$等于 $h_{g1}[n]+h_{g2}[n]$，定义 hparallel 代表这一信号。
- 令 $y_{g2}[n]$是单位脉冲响应为 $h_{\text{parallel}}[n]$的 LTI 系统在输入为 $x_g[n]$时的输出，定义向量 yg2 代表这一信号。

yg1 和 yg2 相等吗？若是，为什么会这样？若不是，违犯了卷积的分配律性质吗？

2.5 线性和时不变性

在本练习中将更加熟悉系统的线性和时不变性的性质。要给出几个系统，然后要求确定它们是否是线性或时不变的。这个练习也要研究离散时间 LTI 系统的一个重要性质：若 $h[n]$是对单位脉冲 $\delta[n]$的响应，那么对任何输入 $x[n]$的系统响应 $y[n]$就由(2.3)式的卷积和确定。对于连续时间 LTI 系统也存在类似的性质。

本练习中的习题都认为十分熟悉函数 conv 和 filter，这两个函数在 2.1 节和 2.2 节都作过说明。

基本题

考虑下面 3 个系统：

系统 1：　$w[n]=x[n]-x[n-1]-x[n-2]$

系统 2：　$y[n]=\cos(x[n])$

系统 3：　$z[n]=nx[n]$

其中 $x[n]$是每个系统的输入，$w[n]$，$y[n]$和 $z[n]$是对应的输出。

(a) 考虑 3 个输入信号 $x_1[n]=\delta[n]$，$x_2[n]=\delta[n-1]$，和 $x_3[n]=(\delta[n]+2\delta[n-1])$。

对系统 1,将对这 3 个输入的响应存入 w1,w2 和 w3 中,向量 w1,w2 和 w3 仅需包含在区间 $0 \leqslant n \leqslant 5$ 内的 $w[n]$ 值。利用 subplot 和 stem 在一张图上画出由 w1,w2,w3 和 w1+2*w2 代表的 4 种函数的图。对系统 2 和 3 也作出类似的图。

(b) 陈述一下是否每个系统都是线性的。若是线性的,说明理由;若不是,利用(a)中画出的各信号给出一个反例。

(c) 陈述一下是否每个系统都是时不变的。若是,说明理由;若不是,利用(a)中画出的各信号给出一个反例。

中等题

在这些习题中,要求考虑如何用单位脉冲响应计算一个 LTI 系统的阶跃响应。现考虑由下列线性差分方程定义的两个因果系统:

系统 1: $y_1[n]=(3/5)y_1[n-1]+x[n]$

系统 2: $y_2[n]=(3/5)^n y_2[n-1]+x[n]$

这里每个系统都满足初始松弛条件。初始松弛条件说的是,若 $x[n]=0, n \leqslant n_0$,则 $y[n]=0, n \leqslant n_0$。定义 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 是系统 1 和系统 2 分别对信号 $\delta[n]$ 的响应。

(d) 在区间 $0 \leqslant n \leqslant 19$ 内计算 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$,并将它们存入 h1 和 h2 中,利用 stem 画出每个响应。**提示**:filter 可用来计算 h1。然而由于描述系统 2 的差分方程带有非常系数,因此必须要么用解析的方法确定 h2,或者用 for 循环而不是 filter 来计算 h2。

(e) 对每个系统,计算在区间 $0 \leqslant n \leqslant 19$ 内的阶跃响应,并将它们存入 s1 和 s2 中。filter 还是只能用于计算系统 1 的阶跃响应,利用 for 循环计算 s2。

(f) 注意,从实际的角度看,$h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 在 $n \geqslant 20$ 都为零。因此 h1 和 h2 包含了每个系统对单位脉冲响应的全部所需要的信息。定义 $z_1[n]=h_1[n]*u[n]$ 和 $z_2[n]=h_2[n]*u[n]$,其中 $u[n]$ 是单位阶跃函数。利用 conv 计算在区间 $0 \leqslant n \leqslant 19$ 内的 $z_1[n]$ 和 $z_2[n]$,并将结果存入向量 z1 和 z2 中。首先必须要定义一个含有在适当区间上的 $u[n]$ 的向量,然后选取由 conv(h1,u)和 conv(h2,u)产生的一段代表在区间 $0 \leqslant n \leqslant 19$ 上的样本。因为已经将两个无限长序列截断了,所以仅有 conv 输出的一部分含有真实的序列值。这个问题在练习 2.7(c)中还将讨论到。

(g) 在同一坐标轴内画出 s1 和 z1。如果这两个信号是完全一样的,说明为什么本来就能估计到这一相似性。否则说明两者之差异何在。在不同的坐标轴内画出 s2 和 z2,再次解释为何本就可以预期到这两个信号之间任何差异或相似性。

2.6 非因果有限脉冲响应滤波器

在本练习中将要学到如何实现单位脉冲响应具有有限个非零样本的一类非因果 LTI 系统。MATLAB 采用所有的信号都从序号 1 开始,但是若对每个信号的时间序号单独定义一个向量(如 1.1 节所说的),还是能够实现非因果系统的。这些 LTI 系统的输入和输出是由下列差分方程所关联:

$$y[n]=\sum_{m=N_1}^{N_2} b[m]x[n-m] \tag{2.16}$$

基本题

(a) 求输入和输出满足(2.16)式的 LTI 系统的单位脉冲响应。如果该系统不是因果的，对于 N_1 的值应该怎样？

(b) 假设一个 LTI 系统，其单位脉冲响应 $h[n]$ 仅在 $N_1 \leqslant n \leqslant N_2$ 内为非零，将它与一个仅在 $N_3 \leqslant n \leqslant N_4$ 内为非零的信号 $x[n]$ 卷积，该系统的输出 $y[n]=x[n]*h[n]$ 也一定是有限长的，设其非零样本的区间为 $N_5 \leqslant n \leqslant N_6$。求用 N_1 到 N_4 来表示 N_5 和 N_6。

(c) 令 $x[n]$ 为下面有限长信号：

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=0\\5, & n=1\\2, & n=2\\4, & n=3\\-2, & n=4\\2, & n=5\end{cases}$$

$h[n]$ 为一非因果系统的单位脉冲响应

$$h[n]=\begin{cases}1-(|n|/3), & |n|\leqslant 3\\0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

定义 MATLAB 向量 x 和 h 代表这些信号(随同标号向量 nx 和 nh 一起)，用 stem 画出这两个信号的图，并作适当标注。

(d) 利用 conv 和在上面定义的向量计算 LTI 系统的输出 $y[n]=x[n]*h[n]$。定义向量 y 代表这个输出向量，并定义一个标号向量 ny，在确定 ny 中可以发现在(b)中所导出的表达式是有用的。利用 stem 画出 $y[n]$ 并给予适当标注。

中等题

有限长脉冲响应的非因果 LTI 系统的一种可能应用是用来对一个离散时间信号样本间的内插。在第 7 章将会更详细讨论这一内插问题。在那里将会看到有几个标准，对于这些标准来说，由(c)中所定义的单位脉冲响应 $h[n]$ 的 LTI 系统可能不是一个理想的内插系统。然而，在某些情形下，$h[n]$ 却提供了一个可接受的内插形式。

(e) 考虑一个新的输入信号

$$x_u[n]=\begin{cases}x[n/3], & n=3k,k\text{ 为整数}\\0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

式中 $x[n]$ 是上面(c)中已定义的信号。

在一个信号的样本之间插入零值的过程一般称为扩展。第 7 章会详细研究这种运算，但是眼下并不要求深入地理解扩展对该信号做了什么。定义 MATLAB 向量 xu 和 nxu 代表这个扩展的信号和它的时间序号。

(f) 由(c)中的单位脉冲响应 $h[n]$ 写出该系统的差分方程。假定这个系统的输入是按照 $x_u[n]$ 那样扩展的话，当 $n=3k$ 时系统输出是什么？当 $n\neq 3k$ 时，输出是怎样与 $x_u[n]$ 关联的？

(g) 令 $y_u[n]=x_u[n]*h[n]$，计算代表 $y_u[n]$ 和它的时间序号的 MATLAB 向量。同样，在

定义标号向量中会发现(b)中的表达式是有用的。将 $x_u[n]$ 和 $y_u[n]$ 的图作适当标注。这些图能确认(f)中的答案吗?

2.7 离散时间卷积

离散时间序列 $h[n]$ 和 $x[n]$ 的卷积在数学上可以表示成由(2.3)式给出的表达式,这个表达式形象化地可以看作是:将序列 $h[m]$ 的时间轴反转并将它移位 n 个样本,然后将移位后的 $h[n-m]$ 乘以 $x[m]$ 并在 m 上将所得到的乘积序列相加。这种说法直接来自离散时间系统的线性和时不变性质。信号 $x[n]$ 可以看成是由延时和加权脉冲的线性叠加所构成,因为一个 LTI 系统能够用它对单个脉冲的响应来表示,那么一个 LTI 系统的输出就应该相应于系统对构成 $x[n]$ 的每一个延时和加权脉冲的响应的叠加。在数学上,这个结果就是卷积和。在这个练习中,对于用在 2.1 节介绍的 MATLAB 函数 conv 来计算离散时间序列卷积将变得更加有经验。

基本题

在这些习题中,将定义几个离散时间信号和几个离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应,然后利用 conv 计算 LTI 系统的输出。

(a) 因为 MATLAB 函数 conv 没有保持被卷积序列的时间序号之间的联系,所以还不得不要做额外的簿记式的事以为了确定函数 conv 结果的正确序号。对序列 $h[n]=2\delta[n+1]-2\delta[n-1]$ 和 $x[n]=\delta[n]+\delta[n-2]$,构成向量 h 和 x,定义 $y[n]=x[n]*h[n]$ 并计算 y=conv(h,x),对 y 确定合适的时间序号,并将这组时间序号存入向量 ny 中,利用 stem(ny,y)画出 $y[n]$ 作为 n 的函数。

(b) 考虑两个有限长序列 $h[n]$ 和 $x[n]$ 用 MATLAB 向量 h 和 x 表示,其相应的时间序号由 nh=[a:b]和 nx[c:d]给出。调用 y=conv(h,x)将会在向量 y 中得到 $y[n]=h[n]*x[n]$ 的正确序列值,但是必须要确定对应的一组时间标号向量 ny。为了帮助构造向量 ny,现考虑序列 $h[n]=\delta[n-a]+\delta(n-b)$ 和 $x[n]=\delta[n-c]+\delta[n-d]$,用解析方法求卷积 $y[n]=h[n]*x[n]$。根据所得结果,确定利用 a,b,c 和 d 表示的 ny 应该是什么。为了验证结果,证实当 $a=0,b=N-1,c=0$ 和 $d=M-1$ 时,$y[n]$ 的长度是 $M+N-1$。

(c) 考虑由下式给出的输入 $x[n]$ 和单位脉冲响应 $h[n]$

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$

$$h[n]=u[n+2]$$

如果想利用 conv 计算 $y[n]=h[n]*x[n]$,就必须要恰当地处理 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的无限长问题。将 $0\leqslant n\leqslant 24$ 的 $x[n]$ 值存入向量 x,$0\leqslant n\leqslant 14$ 的 $h[n]$ 值存入向量 h 中,现在将调用函数 conv(h,x)的结果存入向量 y 中。因为已经将 $h[n]$ 和 $x[n]$ 都截断了,要论证 conv 的输出只有一部分是真实的。试标明在输出中哪些值是真实的,哪些值不是真实的。求参数 a,b,c 和 d 的值,以使得 nx=[a:b]和 nh=[c:d],并由(b)的答案构成 y 的正确时间序号。利用 stem 画出 $y[n]$ 并指出 $y[n]$ 中的哪些值是真实的,哪些值不真实。请务必

对 $y[n]$的时间轴给予适当标注。

中等题

对于这些习题,将研究一种称之为块卷积的方法,这一方法经常用于像语音或音乐处理系统的数字滤波器的实时实现中,因为这时希望有较短的处理延时。这一方法特别在用一个相对短的滤波器处理一个很长的输入序列时最为有用。将输入序列分成一些短的段,其中每一段都能用相当少的延时单独地进行处理。卷积的线性特性能保证所有各段输出的叠加就等于整个序列与滤波器单位脉冲响应序列的卷积。由于有完成有限长序列卷积的高效硬件和算法的缘故,而使得这个方法特别有效。在这个作业中,将利用函数 conv 完成每个较短的卷积。

为了说明这个过程,假设有限长单位脉冲响应 $h[n]$的滤波器仅在 $0\leqslant n\leqslant P-1$ 内为非零值,同时假设输入序列是 $x[n]=0, n<0$,而其长度要比 P 大得多。现在能将信号 $x[n]$分成长度为 L 的一些段

$$x[n]=\sum_{r=0}^{\infty}x_r[n-rL]$$

式中 $L>P$,且

$$x_r[n]=\begin{cases}x[n+rL], & 0\leqslant n\leqslant L-1\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

如图 2.10 所示。

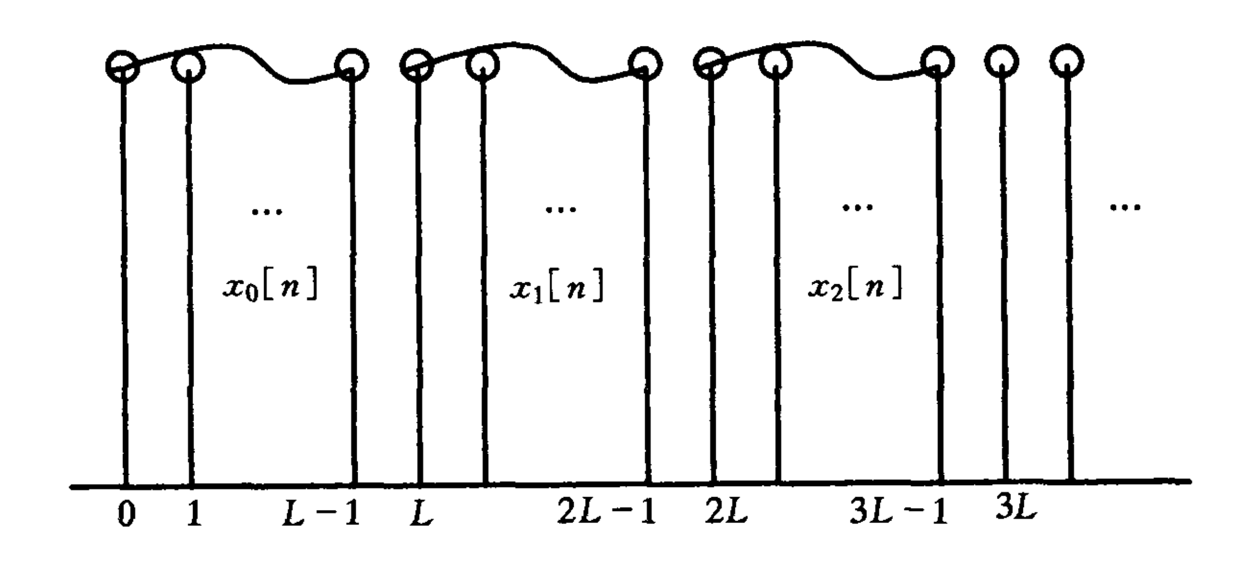


图 2.10 $x[n]$的分段

(d) 对于 $h[n]=(0.9)^n(u[n]-u[n-10])$和 $x[n]=\cos(n^2)\sin(2\pi n/5)$,直接利用 conv 计算在 $0\leqslant n\leqslant 99$ 内的 $y[n]=h[n]*x[n]$,并用 stem 在该区间内画出 $y[n]$。

(e) 设 $L=50$,将 $x[n]$分为两个序列,每一个长都是 50。计算 $y_0[n]=h[n]*x_0[n]$和 $y_1[n]=h[n]*x_1[n]$,这里 $x_0[n]$是 $x[n]$的前 50 个样本,$x_1[n]$是 $x[n]$的第 2 个 50 个样本。输出 $y[n]$的形式给出为

$$y[n]=x[n]*h[n]=y_0[n]+y_1[n-k]$$

求出合适的 k 值并注意:$y_0[n]$和 $y_1[n]$都是长度为 $L+P-1$。当 $y_0[n]$和 $y_1[n]$相加在一起时,一般一定有一个两者都不为零的区域。正是这个原因,这种块卷积的方法称为重叠相加法。用这种方式计算 $y[n]$,并画出在 $0\leqslant n\leqslant 99$ 内的 $y[n]$。所得结果与(d)求

得的一样吗？

深入题

(f) 本题要写出一个 MATLAB 函数来完成重叠相加的块卷积。这个函数应该以单位脉冲响应 h，数据向量 x 和分段长度向量 L 作为输入，而且该函数应容许数据向量 x 是任意长，分段长度向量 L 是比滤波器长度大的任意整数。函数的第 1 行应读出

```
function y = oafilt(h,x,L)
```

利用这个函数重做(e)，并用这个结果与利用 conv 直接卷积所得的结果进行比较，从而证实这个函数运行无误。

2.8　连续时间卷积的数值近似

这个练习要用 MATLAB 计算卷积积分的数值近似。为了利用 MATLAB 向量近似在这个积分中的连续函数，要用到分段常数函数。分段常数函数的卷积产生一个收敛到原连续时间信号卷积的表达式，用该表达式对于在适当选取的时间点上用 MATLAB 求值十分简单。

令 $\delta_\Delta(t)$ 为宽度 Δ，高为 1，以 $t=0$ 为中心的矩形脉冲，即

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1, & -\Delta/2 \leqslant t < \Delta/2 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

一个函数 $x(t)$ 可以用一个分段常数函数 $x_\Delta(t)$ 近似，该 $x_\Delta(t)$ 由一串高度为 $x(k\Delta)$，相距 Δ 的脉冲所组成

$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)$$

当 $\Delta \to 0$ 时，在极限情况下一大类函数都有 $x_\Delta(t) \to x(t)$。例如，图 2.11 示出对于 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 和 $\Delta = 0.25$ 时的 $x_\Delta(t)$，由图很容易看出，随着 Δ 的减小，$x_\Delta(t)$ 是如何更加近似 $x(t)$ 的。

类似地，$h(t)$ 也能近似为

$$h_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)$$

对于一个 LTI 系统的卷积积分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.17}$$

就可以近似为分段常数信号的卷积

$$y_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\Delta(\tau)h_\Delta(t - \tau)\mathrm{d}\tau$$

值得注意的是，$y_\Delta(t)$ 本身不是必然也为分段常数的，而是两个分段常数信号的卷积。

本练习将对几个不同的 Δ 值，用分段常数函数近似 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 与 $h(t) = u(t)$ 的卷积。随着 $\Delta \to 0$，这个近似式将收敛到这两个函数的解析卷积式。

基本题

(a) 对于上面定义的 $x(t)$ 和 $h(t)$ 用解析法求 $y(t) = x(t) * h(t)$。因为需要知道这个卷积

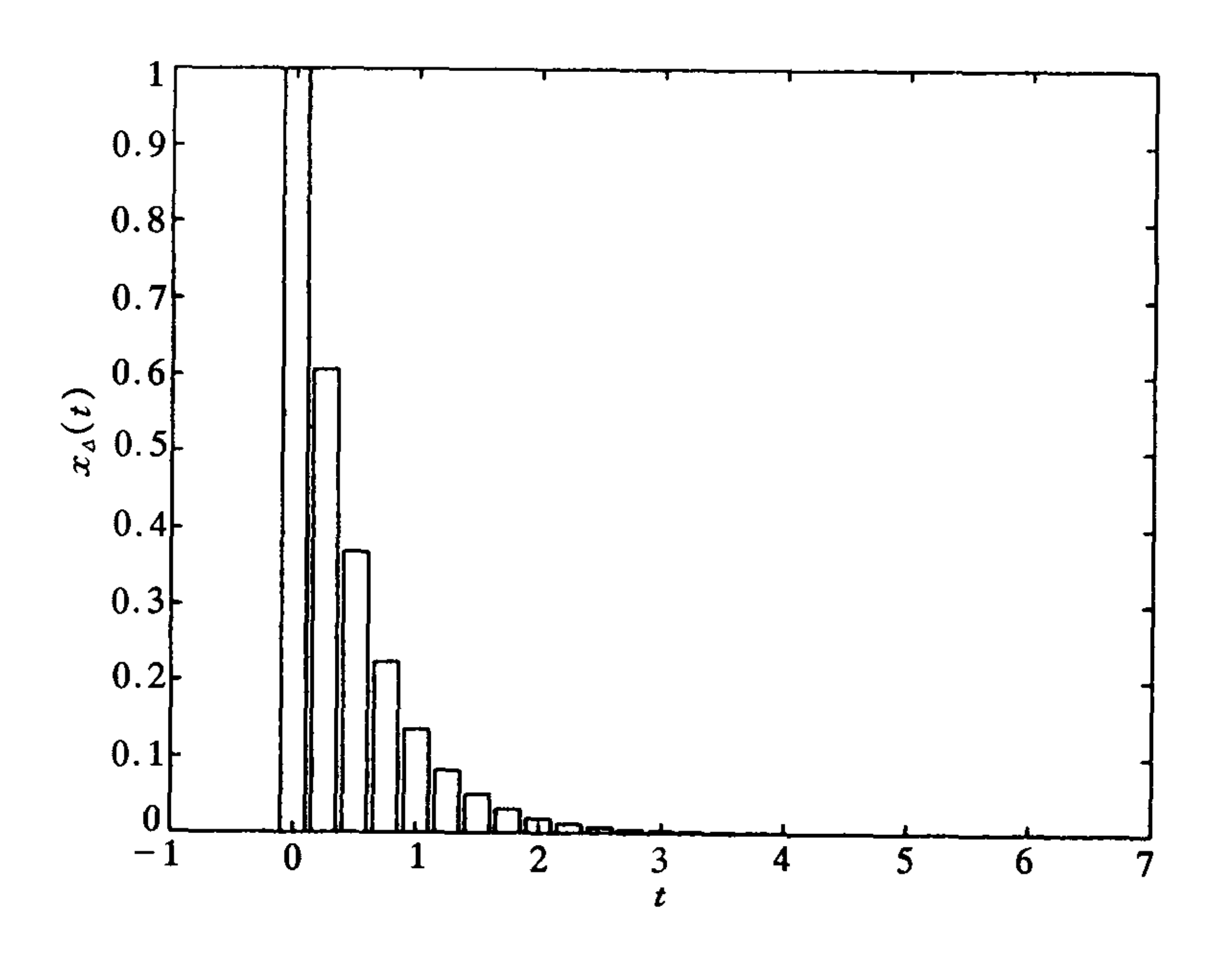


图 2.11 作为 $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)(\Delta=0.25)$近似的分段常数函数 $x_\Delta(t)$

的结果,以便与本练习中要计算出的数值近似进行比较。

中等题

一般来说,对 $y_\Delta(t)$求解可能是复杂的。然而,当 t 取为 Δ 的整倍数时,求这个卷积值是很简单的,所以将仅计算在这些时刻上的输出,即 $y_\Delta(n\Delta)$。图 2.12 示出 $\Delta=0.25$ 时的 $x_\Delta(\tau)$和 $h_\Delta(1-\tau)$。将这两个函数的乘积求积分就得到 $y_\Delta(1)$。因为这两个信号的常数部分对这个 t 值是完全对准成一条线的,所以积分求值就很简单。当 $t=n\Delta$ 时,这些常数部分总是以这种方式对准的。

(b) 由(2.17)式的卷积积分出发,导出一般情况

$$y_\Delta(n\Delta) = \Delta\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)h((n-k)\Delta) \tag{2.18}$$

在(b)导出的这个表达式可用来近似 $y(t)$。如果用包含信号在 $t=n\Delta$ 上的值的 MATLAB 向量来表示信号 $x_\Delta(t)$,$h_\Delta(t)$和 $y_\Delta(t)$的话,那么(2.18)式就是 MATLAB 向量的离散卷积和。随着 Δ 的减小,利用计算这个离散卷积,就能得到 $y(t)$的很好的近似。

(c) 定义 x1 是 $\Delta=0.5$ 时,在区间 $0\leqslant t\leqslant 6$ 上 $x_\Delta(n\Delta)$的值,x1 的第 m 个元素应该是 $x_\Delta((m-1)\Delta)$,也即 $\mathrm{x}(1)=x_\Delta(0)$。类似地,定义 h1 是 $\Delta=0.5$ 时,在同一时间区间内 $h(t)$的样本。

(d) 第 2.1 节说明如何利用 conv 函数实现一个卷积和。试用 conv 计算 x1 和 h1 的离散卷积 y1,不要忘记应将卷积的结果再乘以 Δ,如(2.18)式表明的那样。注意:因为 x1 和 h1 都是无限长信号的有限长部分,所以 y1 中的有限长部分仅一部分是 $y(t)$的真实近似,y1 的其余部分必须除掉。对于什么样的 t 值,y1 才近似于 $y(t)$? 画出 y1 的真实部分,并给时间轴正确标注。请问 y1 是(a)中求出的解析表达式的一个好的近似吗?

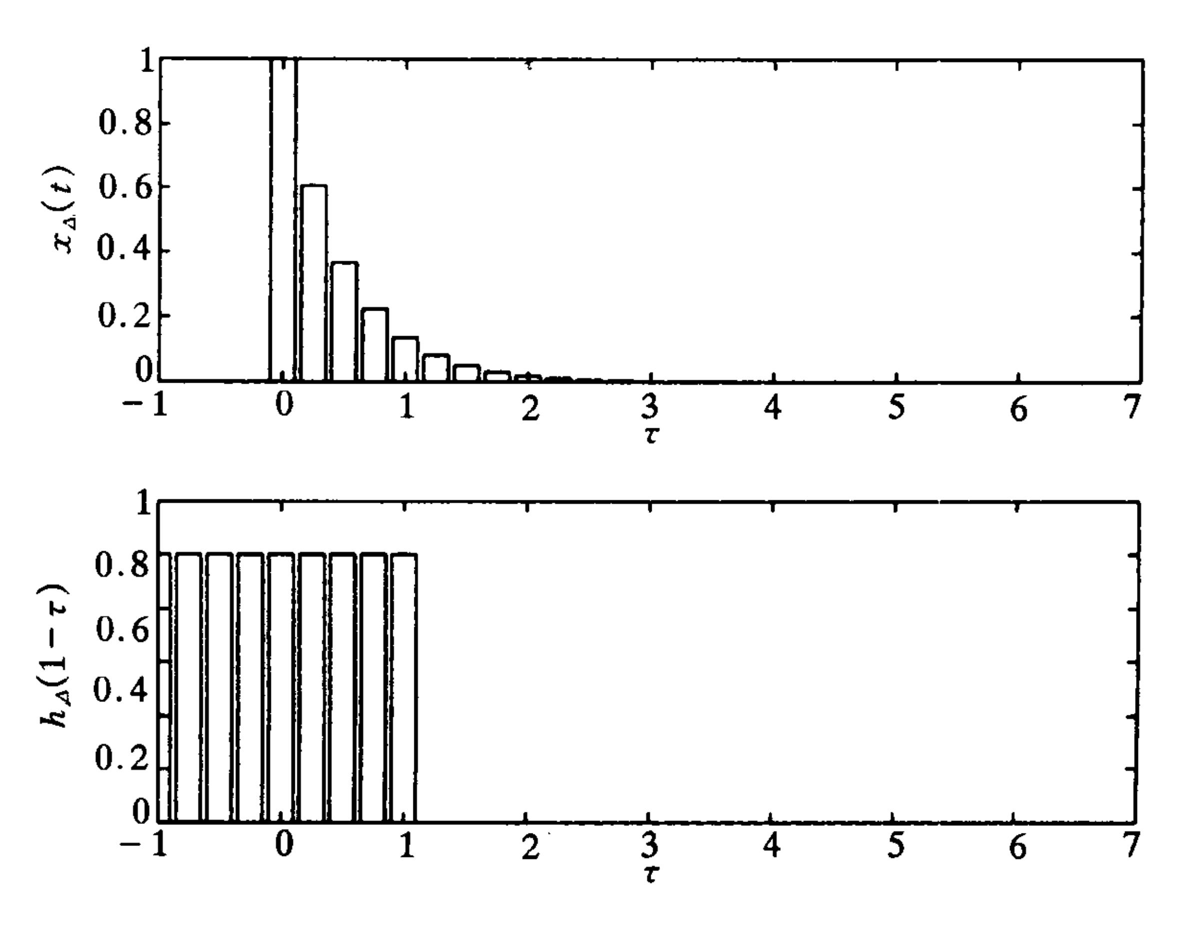


图 2.12　$\Delta=0.25$ 时的 $x_{\Delta}(\tau)$和 $h_{\Delta}(1-\tau)$

(e) 利用向量 x2～x4 代表在区间 $0\leqslant n\leqslant 6$ 内，$\Delta=0.25, 0.1$ 和 0.01 时的 $x_{\Delta}(n\Delta)$，定义 h2～h4 是在同一区间上，同一采样周期的 $h_{\Delta}(n\Delta)$。利用 conv 和对应的输入和单位脉冲响应计算 y2～y4。在每一种情况下，在同一个 t 的范围内，输出都是真实的，但是由于 Δ 不同，每种输出就对应一组不同的样本值。请在同一坐标轴上画出 y1～y4。对于哪些 Δ 值，近似的渐近值是在(a)中求得的真正 $y(t)$的渐近值的 10%以内？

2.9　连续时间 LTI 系统的脉冲响应

LTI 系统的一个重要性质是系统完全由它的单位冲激响应所确定①。若 $h(t)$是一连续时间 LTI 系统对单位冲激函数 $\delta(t)$的响应，那么

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

就是对任何输入 $x(t)$的系统响应。然而，LTI 系统也能由对一有限持续期脉冲的响应来有效地表征，只要脉冲的持续期选得足够短。也就是定义 $\delta^{\Delta}(t)$为

$$\delta^{\Delta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}, & 0\leqslant t<\Delta\\ 0, & \text{其余 } t\end{cases}\tag{2.19}$$

值得注意的是这个脉冲的面积仍然是常数，而且对所有 $\Delta>0$ 的值都等于 1。如果 $h^{\Delta}(t)$是 LIT 系统对 $\delta^{\Delta}(t)$的响应，而

$$y^{\Delta}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h^{\Delta}(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

---

① 有关 $\delta(t)$的更加完整的讨论及其在 LTI 系统表征中的作用可见“信号与系统”的 2.5 节。

那么 $y^{\Delta}(t) \approx y(t)$，如果 Δ 选得足够小。这里所谓的"足够小"是指 $h(t)$ 和 $h^{\Delta}(t)$ 之间的差已不具有实际意义。对于这个足够小的 Δ 值一定与特定的 LTI 系统有关，然而对大多数信号而言，总有当 $\Delta \to 0$ 时，$h^{\Delta}(t) \to h(t)$。

本练习要考虑输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足下面一阶线性微分方程的因果 LTI 系统：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 3y(t) = x(t) \tag{2.20}$$

将要研究这个系统对各种形状和持续期脉冲的响应，并会发现对各种不同的 Δ 值，$h^{\Delta}(t)$ 是怎样准确地表征这个系统的。

基本题

(a) 用解析方法导出(2.20)式因果 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 和单位冲激响应 $h(t)$。**提示**：单位冲激响应等于 $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$。将 $h(t)$ 和 $s(t)$ 在向量 t=[-1:0.05:4]的每个时间样本上的值存入向量 h 和 s 中，画出 h 和 s 对 t 的图。

(b) 利用 step 和 impulse 证实在(a)中计算出的函数。函数 step(b,a,t)和 impulse(b,a,t)在 2.3 节已经说明过，向量 b 和 a 由(2.20)式的系数确定，时间向量 t 用 t=[0:0.05:4]。

中等题

在 2.3 节已经学会了如何用 lsim 求一个由线性常系数微分方程描述的因果连续时间 LTI 系数的响应，现在要用 lsim 仿真对不同形状和持续期脉冲的响应 $h^{\Delta}(t)$。

(c) 用 lsim 对 $\delta^{\Delta}(t)$，$\Delta = 0.1, 0.2$ 和 0.4，的响应作仿真。时间向量用 t=[-1:0.05:4]，并分别将对应于 $\Delta = 0.1, 0.2$ 和 0.4 的 $\delta^{\Delta}(t)$ 值存入 d1,d2 和 d3 中。记住 $\delta^{\Delta}(\Delta) = 0$，而不是 $1/\Delta$。分别将 $\Delta = 0.1, 0.2$ 和 0.4 的已仿真响应存入向量 h1,h2 和 h3 中，这些向量包含了 $h^{\Delta}(t)$ 在给定向量 t 的时间样本上的已仿真值。

在 3 个单独的图上画出 $h^{\Delta}(t)$ 的已仿真值。在每一张图内还要包括 $h(t)$ 的图，$h(t)$ 存在(a)中的向量 h 内。随着 Δ 减小，$h^{\Delta}(t)$ 与 $h(t)$ 比较情况如何？

(d) 为什么必须保证 $\delta^{\Delta}(t)$ 的面积为 1？也就是说，如果换为对

$$D^{\Delta}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \Delta \\ 0 \end{cases}$$

的响应作为 $h(t)$ 的近似会怎样？

(e) 现考虑下面函数：

$$d_a(t) = a\mathrm{e}^{-at}u(t) \qquad a > 0$$

虽然 $d_a(t)$ 具有无限持续期，但信号的大部分能量都包含在区间 $0 \leqslant t \leqslant 4/a$ 内。对于足够大的 a 值，从所有的实际效果来看，这个 LTI 系统对于 $d_a(t)$ 的响应将与 $h(t)$ 是一样的。作为 $a > 0$ 的函数，$d_a(t)$ 的面积是什么？

利用 t=[-1:0.05:4]并分别将 $a = 4, 8$ 和 16 对应的 $d_a(t)$ 值存入向量 da1,da2 和 da3 中，对每一 a 值，利用 lsim 对 $d_a(t)$ 的 LTI 系统响应进行仿真。利用 plot 在单独的图上画出每一个函数，同时在同一张图上还要包括由(a)计算出的单位脉冲响应。对于大的 a 值，对 $d_a(t)$ 的响应与 $h(t)$ 比较结果如何？

深入题

这些深入题是假定已经完成了练习 2.8。在练习 2.8 中,已经学过如何将两个信号的卷积 $y(t)=x(t)*h(t)$ 用两个分段常数函数的卷积来近似。(应当注意:分别在本练习中所定义的函数 $h^{\Delta}(t)$ 和在练习 2.8 中所定义的 $h_{\Delta}(t)$,两者具有不同意义)。可以用在本练习(c)中计算出的向量 h1 得到 $\Delta=0.1$ 时的 $h^{\Delta}(t)$ 的分段常数近似。也就是说,因为 h1(n+1) 包含了 $h^{\Delta}(t)$ 在 $t=0.05n$ 时仿真值,所以 $h^{\Delta}(t)$ 的分段常数近似就在区间 $0.05(n-1/2)\leqslant t\leqslant 0.05(n+1/2)$ 上等于 h1(n+1)。如果 x 包含了在同一区间内的 $x(t)$ 的分段常数近似值,那么正如在练习 2.8 所表明的,就能用 Delta * conv(h1,x) 近似在 $t=0.05n$ 上 $y(t)$ 的值。

在这些习题中要试图证明,对 $\Delta=0.1$ 的 $h^{\Delta}(t)$ 能够有效地表示由(2.20)式给出的 LTI 系统。

(f) 对时间向量 t,用 t=[-1:0.05:4],并在向量 u 中存入在 t 的每一时刻点上求出的单位阶跃函数 $u(t)$ 的值。

(g) 函数 $h^{\Delta}(t)$ 能用来计算作为单位阶跃响应近似的 $s^{\Delta}(t)=h^{\Delta}(t)*u(t)$。利用 conv(h1,u) 来近似 $s^{\Delta}(t)$。记住:离散卷积必须要乘以 Δ,并且由 conv(h1,u) 得到的信号仅有一部分包含了 $s^{\Delta}(t)$ 的样本。在同一张图上画出用 conv 计算出的近似阶跃响应和由(a)中计算出并存在向量 s 中的真正阶跃响应的样本。随着 Δ 的增加,对于阶跃响应的离散时间近似的准确度如何改变?请说明原因。

2.10 通过逆滤波的回声消除

这个练习要研究从一段语音信号的记录中消除回声的问题。这个作业将用到既把原语音的录音,又将处理结果的录音播放出的 MATLAB 的声音能力。着手这个练习之前,需要装入语音文件 lineup.mat,这个文件含在 Computer Explorations Toolbox 中,The Computer Explorations Toolbox 可根据前言中提供的地址从 The Math Works 公司得到。如果这个语音文件已经在你的 MATLABPATH 的某个地方的话,就能键入

```
>> load lineup.mat
```

将数据装进 MATLAB 中去。还可以用键入 path 查验一下你的 MATLABPATH,它是最近用 MATLAB 可以得到的全部目录清单,文件 lineup.mat 必定是其中之一。

一旦将数据装入 MATLAB,语音波形就存入变量 y 中。因为这段语音是用采样率 8192Hz 录制的,所以用键入

```
>> sound(y,8192)
```

就能听到语音,应该听到词组"line up"并有回声。由向量 y 表示的信号 $y[n]$ 具有形式为

$$y[n]=x[n]+\alpha x[n-N] \tag{2.21}$$

其中 $x[n]$ 是未被污损的语音信号,它被延时 N 个样本且在幅度上减小 $\alpha<1$ 倍后又反过来加到 $x[n]$ 上去。这对于像从一面墙壁那样的吸收表面反射回来的信号所形成的回声来说,这是一个合理的模型。如果一只拾音器放在一间屋子的当中,而一个人正在房间的一头说话,那么录音中将包括直接传到拾音器的这个语音,以及经过房内传输,又从远处的墙壁反射回来,再进入拾音器的回声。因为回声必须是向前传播的,所以时间上一定延时;另外,又因为语音

被墙壁部分吸收,因此幅度一定衰减。为简化分析,不再顾及任何再一次的反射或其他的回声源。

本练习中的习题都用回声延时值 $N=1\,000$,回声衰减 $\alpha=0.5$。

基本题

(a) 本练习将用线性滤波消除回声。因为回声可用(2.21)式的线性系统表示,试求并画出(2.21)式回声系统的单位脉冲响应,并将它在 $0\leqslant n\leqslant 1\,000$ 内的值存入向量 he 中。

(b) 考虑一个由下面差分方程描述的回声消除系统

$$z[n]+\alpha z[n-N]=y[n] \tag{2.22}$$

式中 $y[n]$是输入,$z[n]$是回声被消除的输出。根据导出关联 $z[n]$和 $x[n]$的总差分方程证明,(2.22)式确是(2.21)式的逆。对于总差分方程,$z[n]=x[n]$是一个真实的解吗?

中等题

(c) (2.22)式的回声消除系统其单位脉冲响应是无限长的。假设 $N=1\,000$,$\alpha=0.5$,利用 filter,在输入为单位脉冲(由 d=[1 zeros(1 4000)]给出)时计算系统的单位脉冲响应,并将这 4 001 个单位脉冲响应的样本近似值存入向量 her 中。

(d) 利用 z=filter(1,a,y)实现这个回声消除系统,其中 a 是由(2.22)式导出的系数向量。利用 plot 画出输出,同时利用 sound 听听输出。应该不再听到回声。

(e) 计算将回声系统(2.21)式与回声消除系统(2.22)式级联后的总单位脉冲响应,这可将 he 与 her 卷积,并将卷积结果存入 hoa 中得到。画出总单位脉冲响应。应该注意,这个结果不是一个单位脉冲。已经知道计算出的 her 是 he 的逆,为什么结果又是这样呢?

深入题

(f) 假设已知 $y[n]$,但是不知道回声时间 N 的值,或者不知道回声的幅度 α,基于(2.21)式,你能确定一种估计这些值的方法吗?**提示:**考虑这个回声系统的输出 y 具有如下形式:

$$y[n]=x[n]*(\delta[n]+\alpha\delta[n-N])$$

并考虑信号

$$R_{yy}[n]=y[n]*y[-n]$$

这称为信号 $y[n]$的自相关函数,并常常用于回声时间估计应用中。用 $R_{xx}[n]$写出 $R_{yy}[n]$并画出 $R_{yy}[n]$。在计算之前必须要将 $y[n]$截断,以便保持 $R_{yy}[n]$在 Student Edition of MATLAB 的限制以内。将会发现,当 y 截断后,自相关函数的许多性质仍然成立。另外,用改变 N,alphe 和 NX 试试下面的简单回声问题:

```
>> NX=100;
>> x=randn(1,NX);
>> N=50;
>> alpha=0.9;
>> y=filter([1 zeros(1,N) alpha],1,x);
>> Ryy=conv(y,fliplr(y));
```

```
>> plot([-NX+1:NX-1],Ryy)
```

当装入 lineup.mat 时，也同时装入两个另外的向量。向量 y2 含有词组“line up”，并有不同的回声时间 N 和不同的回声幅度 α。向量 y3 含有两个回声的同样一个词组，每一个都具有各自的回声时间和幅度。你能对 y2 估计出 N 和 α 吗？对 y3 估计出 N_1, α_1, N_2 和 α_2 吗？

第 3 章

周期信号的傅里叶级数表示

成谐波关系的复指数信号就是它们的频率互为整数倍的信号,连续时间和离散时间傅里叶级数将周期信号表示成成谐波关系的复指数信号的加权和。因为复指数信号是 LTI 系统的特征函数,所以这种表示法能够直接计算在一给定周期输入下一个系统的输出。本章的这些练习将研究用复指数分析和综合周期信号,以及当用 LTI 系统处理时这些信号会怎样改变。

3.1 节讨论如何利用函数 fft 计算离散时间傅里叶级数(DTFS),而 3.2 节则说明如何利用 freqz 求一个线性常系数差分方程的频率响应。3.3 节是在 2.3 节基础上的扩展,说明 lsim 也能够用于从系统函数和微分方程仿真一个连续时间系统。练习 3.4 和 3.5 研究特征函数的性质和离散时间信号的综合。连续时间傅里叶级数(CTFS)的性质将在 3.6 节和 3.7 节说明。3.8 和 3.9 节研究简单滤波器对周期离散时间和连续时间信号的作用。比之 DTFS 的直接实现要高效得多的 fft 将在练习 3.10 说明。

本章还包括几个练习是用 MATLAB Symbolic Math Toolbox 研究周期信号的。练习 3.11 用不同选择的周期 T 从 CTFS 综合几个连续时间信号,而练习 3.12 则全部集中在方波和三角波上。练习 3.13 仿真一个简单的 RL 电路对周期输入的响应。

3.1 用 fft 计算离散时间傅里叶级数

这是对周期离散时间序列的一种频域表示法。对于基波周期为 N 的信号 $x[n]$,DTFS 的综合与分析公式分别由下面(3.1)和(3.2)式给出:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \tag{3.1}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \tag{3.2}$$

记住 $x[n]$具有周期为 N,这样(3.2)式的和式就能用在任意 N 个相继的 n 值上的和来代替;类似地,a_k 对 k 来说也是周期的,周期为 N,所以(3.1)式的和式也能用在任意 N 个相继的 k 值上的和代替。

MATLAB 内有两个非常高效地计算(3.1)和(3.2)式的程序。若 x 是一个包含在单一周期 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 内 $x[n]$的 N 点向量,那么 $x[n]$的 DTFS 就能用 a=(1/N)*fft(x)计算出,这里 N 点向量 a 包含了 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 上的 a_k。函数 fft 就是(3.2)式的一种高效实现再乘以

N。例如，假设 $x[n]$ 是如图3.1所画的基波周期为32的信号。该信号可以在 $0\leqslant n\leqslant 31$ 内表示为

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=0,1\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

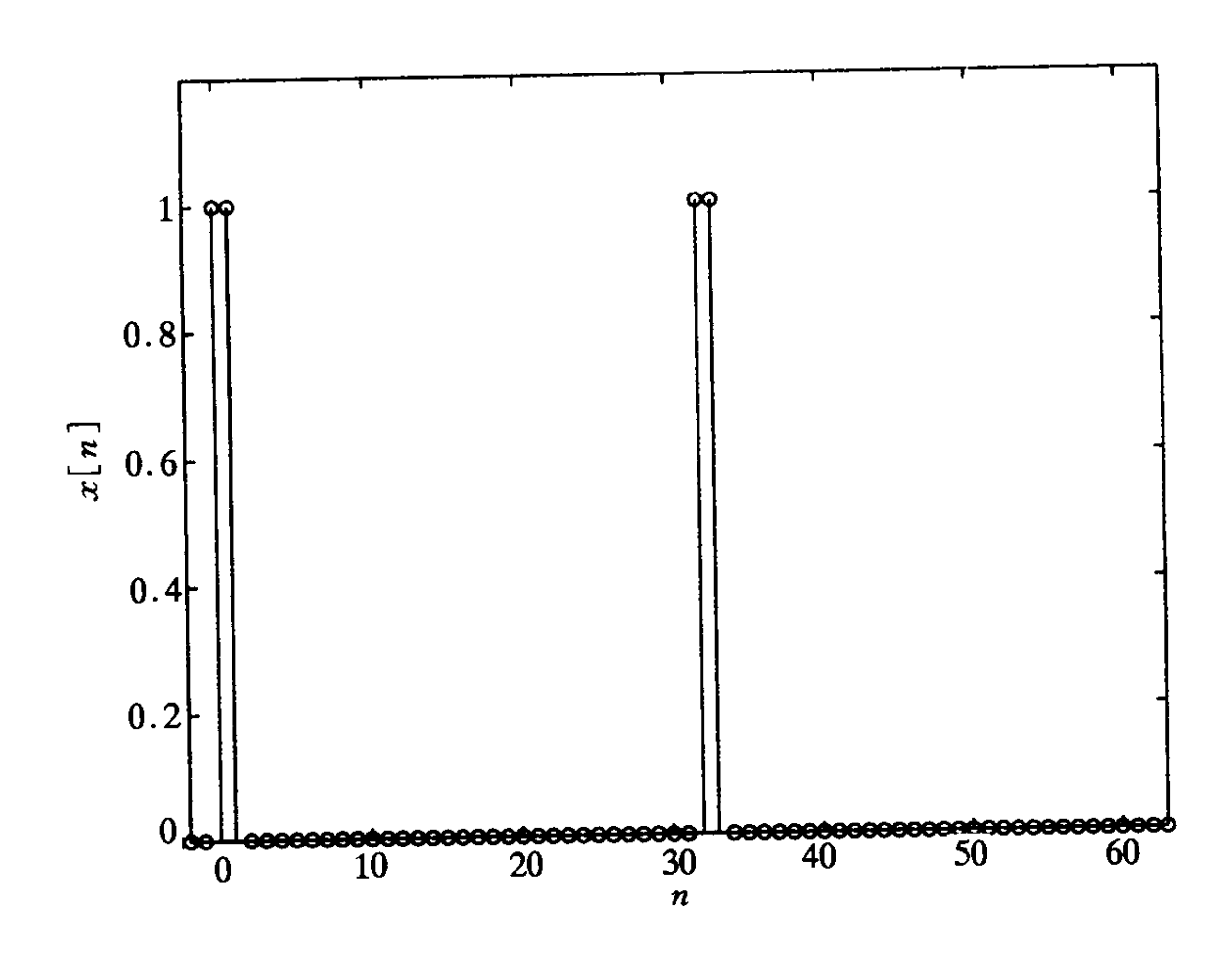


图3.1　基波周期 $N=32$ 的周期离散时间信号 $x[n]$

定义 x=[1 1 zeros(1,30)]，键入 a=(1/N)*fft(x)就能计算出DTFS。a的实部和虚部如图3.2和图3.3所示。可以用解析方法确认，对 a_k 这些都是正确的值。

已知a向量含有在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内的DTFS系数 a_k，就能用函数ifft构成一个包含在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内的 $x[n]$ 的向量x为x=N*ifft(a)。函数ifft就是DTFS综合公式的一种高效实现再乘以 $1/N$。由实部和虚部为图3.2和图3.3所示的向量a，求得一个信号N*ifft(a)，其实部和虚部分别如图3.4和图3.5所示。尽管在图3.1中所画的信号是没有任何虚部成分的，但是由图3.5所示的N*ifft(a)的虚部分量并不恒为零！然而，再仔细地察看一下图3.5的纵坐标就会发现，虚部分量是非常的小，都在 $\pm 10^{-16}$ 以内。这个虚部分量是由于数值计算中的舍入误差造成的，数值舍入误差是由于在任何计算机实现中所用的有限精度算术运算产生的。在本书的练习中，数值舍入误差一般没有什么意义并可予以不顾。对于这个信号，N*ifft(a)应该是实的，所以可用real(N*ifft(a))综合成 $x[n]$。

事实上，fft和ifft实现的是下面一对方程：

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n}$$

$$a_k=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)n}$$

这对综合和分析公式是另一种表示形式，而且也被一些教科书所采用。本书练习是遵循“Signals and Systems”一书的用法，即用(3.1)和(3.2)式。

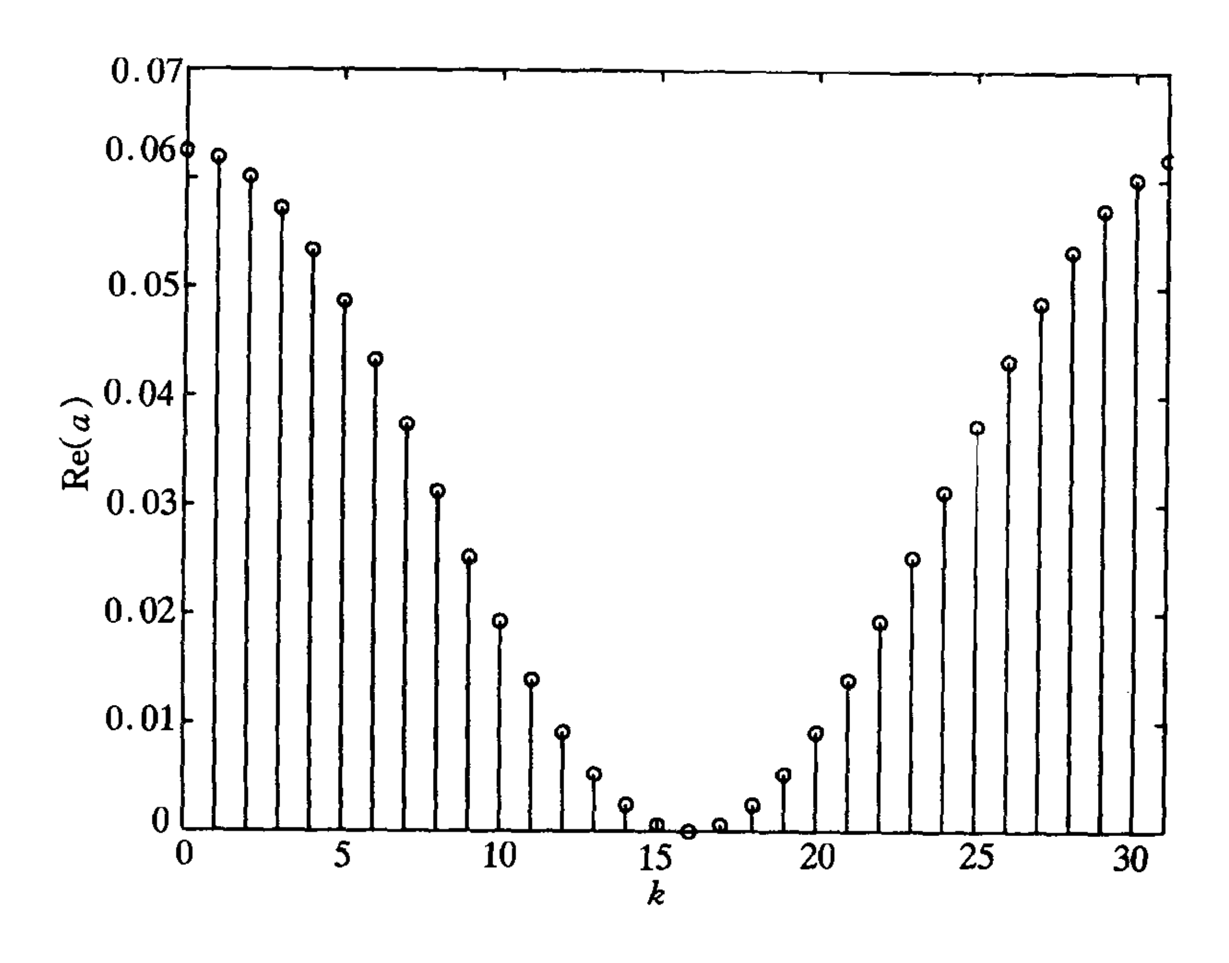


图 3.2 在 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 内 a_k 的实部

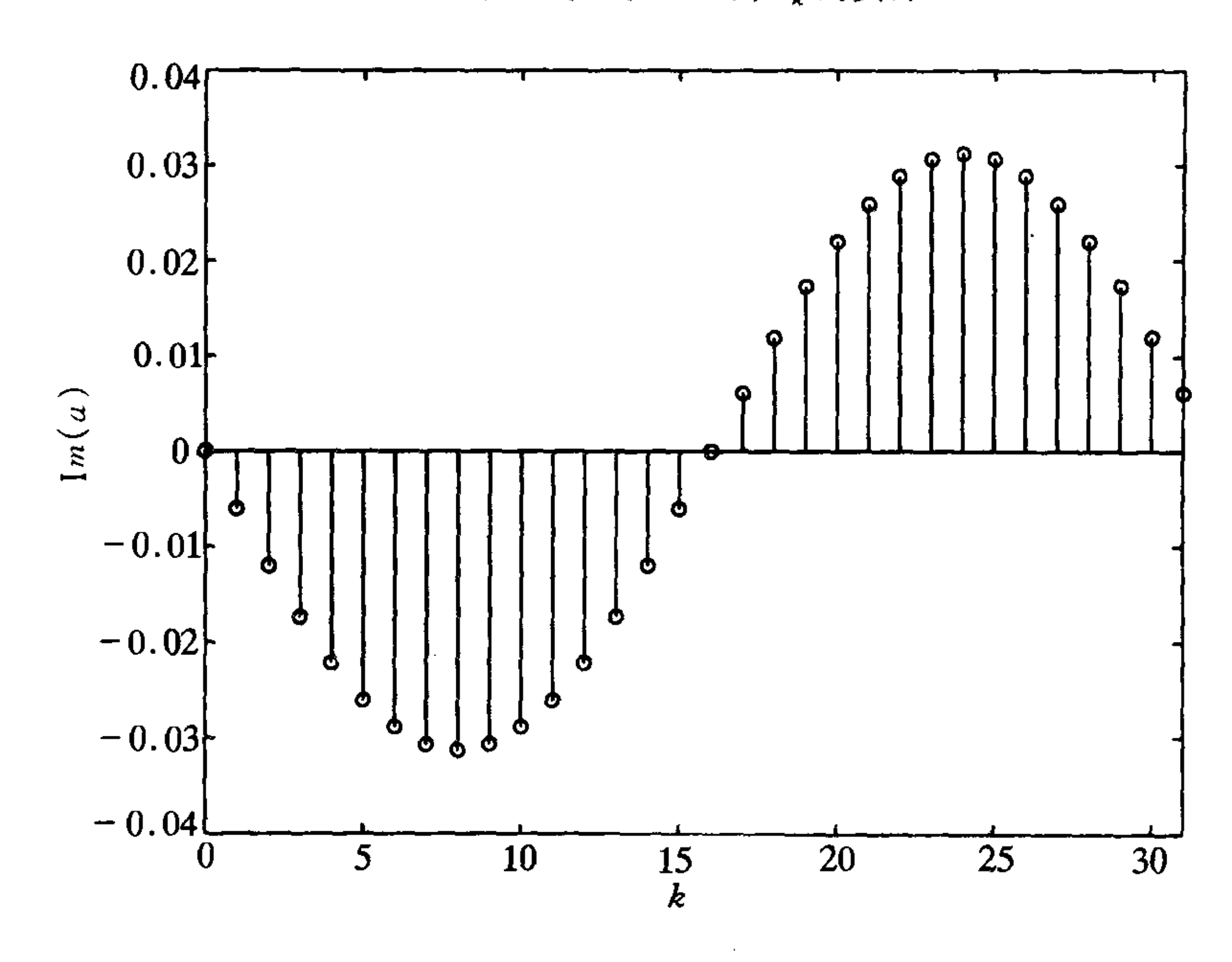


图 3.3 在 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 内 a_k 的虚部

3.2 MATLAB 函数 freqz

信号 $e^{j\omega n}$ 是 LTI 系统的特征函数。对每个 ω 值，频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是该 LTI 系统对于特征函数 $e^{j\omega n}$ 的特征值；当输入序列是 $x[n]=e^{j\omega_0 n}$ 时，输出序列就是 $y[n]=H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$。对于一个由差分方程描述的因果 LTI 系统，命令[H omega] = freqz(b,a,N)计算出在 0 和 π 之间 N

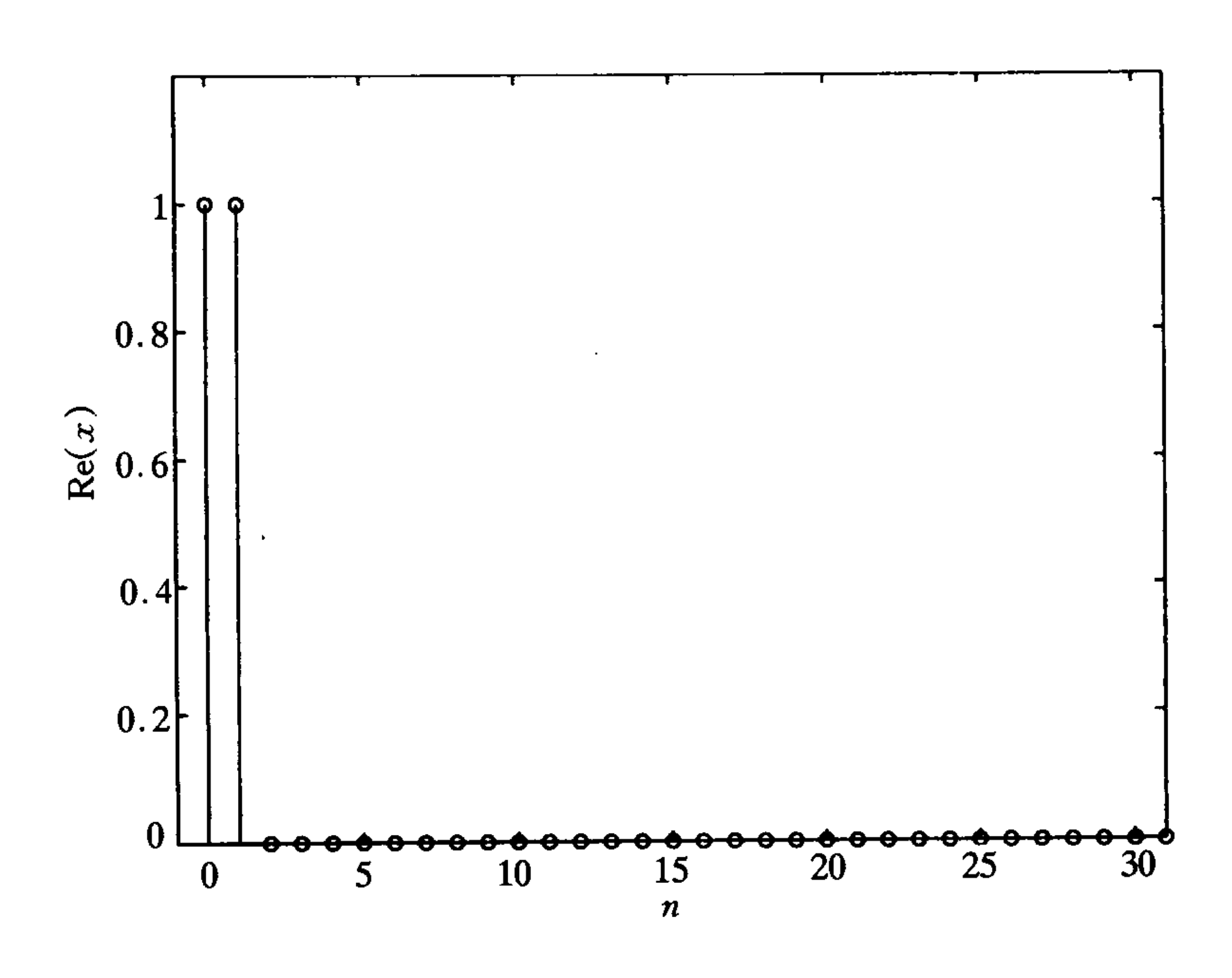


图 3.4　已综合出的离散时间信号的实部

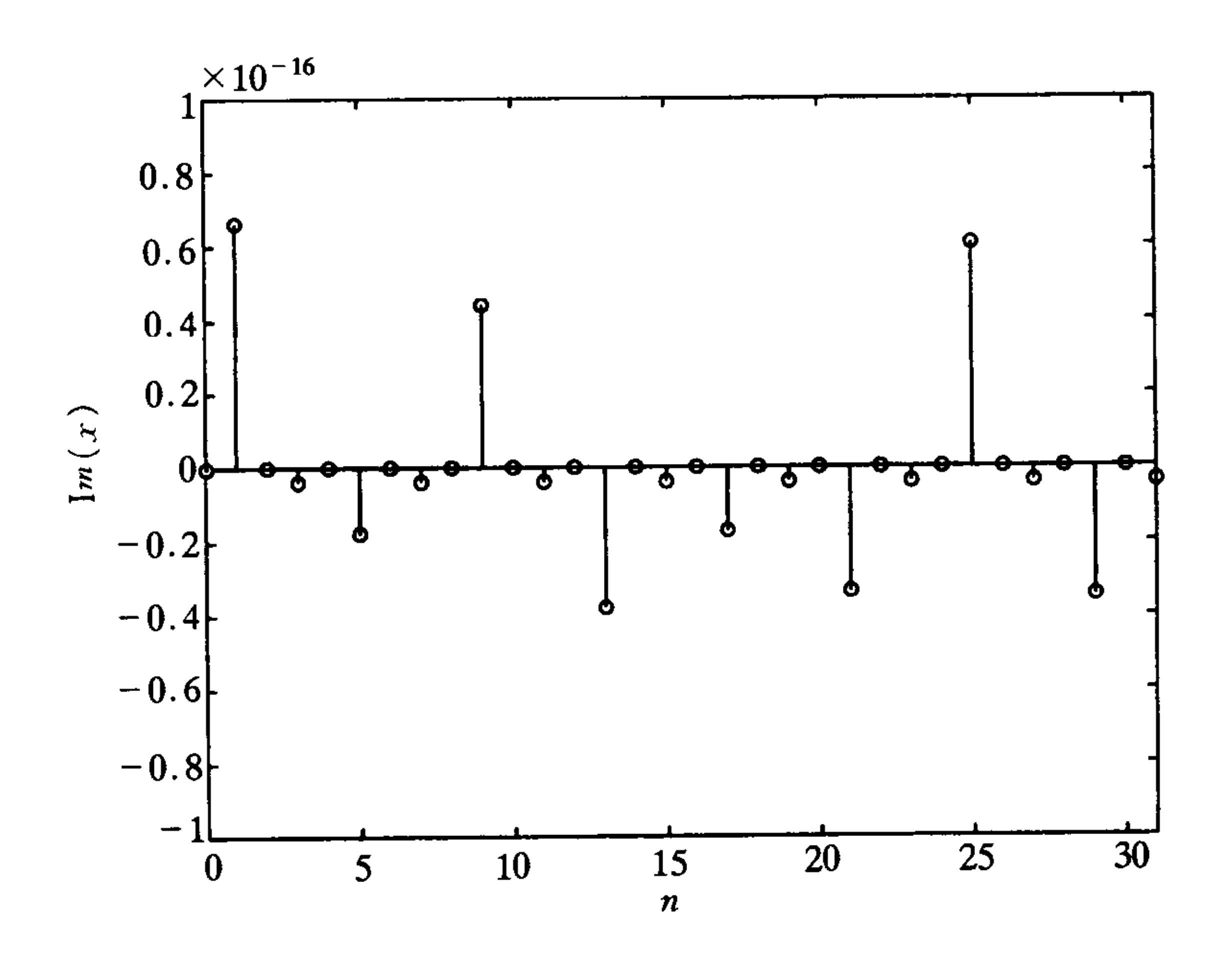


图 3.5　已综合出的离散时间信号的虚部。注意当将虚部分量与图 3.4 中的实部分量比较后就知道,这个虚部分量是没有意义的

个等分频率上(即 $\omega_k=(\pi/N)k,0\leqslant k\leqslant N-1$)的频率响应 $H(e^{j\omega})$。利用在 filter 中和(2.8)式相同的格式,系数向量 a 和 b 标定出这个差分方程。对于上面的命令,由 freqz 就得到在 H 中 $H(e^{j\omega_k})$和在 omega 中的频率 ω_k。还包括'whole'的选项,如[H omega] = freqz(a,b,N,'whole')能计算出从 0 到 2π 的 N 个等分频率上(即 $\omega_k=(2\pi/N)k,0\leqslant k\leqslant N-1$)的频率响应

$H(e^{j\omega})$。

(a) 定义用向量 a1 和 b1 描述由差分方程 $y[n]-0.8y[n-1]=2x[n]-x[n-2]$表征的因果 LTI 系统。

(b) 用在(a)中的系数向量,利用 freqz 定义 H1 是在 0 和 π 之间 4 个等分频率上频率响应的值,omega1 是这些频率值。如果已经正确地定义了这些量,那么下面的样本输出就表明每个向量应该有的值:

```
>> H1.'
ans =
  5.0000    2.8200 - 1.3705i    1.8293 - 1.4634i    0.9258 - 0.9732i
>> omega1.'
ans =
     0      0.7854              1.5708              2.3562
```

(c) 利用 freqz 定义 H2 是在 0 和 2π 之间 4 个等分频率上频率响应的值,omega2 是这些频率值。如果已经正确地定义了这些量,那么下面的样本输出就表明每个向量应该有的值:

```
>> H2.'
ans =
  5.0000    1.8293 - 1.4634i    0.5556              1.8293 + 1.4634i
>> omega2.'
ans =
     0      1.5708              3.1416              4.7124
```

3.3 MATLAB 函数 lsim(用于系统函数)

2.3 节所讨论的是如何用 lsim 命令仿真一个其输入输出满足一个线性常系数微分方程的因果 LTI 连续时间系统。因为系统函数唯一地表征了关联系统输入和输出的微分方程。所以由系统函数表征的因果 LTI 系统的输出也能够用 lsim 仿真。如果系统函数给出形式为

$$H(s)=\frac{\mathrm{b}(1)s^{M}+\cdots+\mathrm{b}(M-1)s+\mathrm{b}(M)}{\mathrm{a}(1)s^{N}+\cdots+\mathrm{a}(N-1)s+\mathrm{a}(N)}$$

那么,对输入 $x(t)$的系统输出就能用 lsim(b,a,x,t)仿真,其中 MATLAB 向量 b 和 a 包含了分子分母 s 多项式的系数,而向量 x 和 t 则是和 2.3 节采用的相同格式对输入信号的描述。注意,$H(s)$必须是真有理分式,即 $N\geqslant M$。

作为一个例子,考虑系统函数为

$$H(s)=\frac{s+\frac{1}{2}}{s-2}$$

其系数由向量 b=[1 1/2]和 a=[1 -2]定义。命令 y=lsim(b,a,x,t)将系统对由向量 x 给出的输入,在向量 t 给定的时刻上的系统的时间响应存入向量 y 中,向量 y 和输入向量 x 有相同数量的元素。

(a) 定义系数向量 a1 和 b1 用以描述由下面系统函数表征的因果 LTI 系统:

$$H_1(s)=\frac{s-2}{s+2}$$

(b) 定义系数向量 a2 和 b2 用以描述由下面系统函数表征的因果 LTI 系统：

$$H_2(s)=\frac{3}{s+0.3}$$

(c) 定义系数向量 a3 和 b3 用以描述由下面系统函数表征的因果 LTI 系统：

$$H_3(s)=\frac{2s}{s+0.8}$$

(d) 利用 lsim 和前面部分定义的向量求这些因果 LTI 系统对由 t=[0:0.1:0.5],x=cos(t)给出的输入的输出。以下的结果给出了每个系统的输出：

```
>> y1 = lsim(b1,a1,x,t)'
y1 =
    1.0000    0.6334    0.3261    0.0692    -0.1444    -0.3205
>> y2 = lsim(b2,a2,x,t)'
y2 =
    0         0.2948    0.5779    0.8468    1.0991     1.3323
>> y3 = lsim(b3,a3,x,t)'
y3 =
    2.0000    1.8366    1.6667    1.4910    1.3105     1.1262
```

3.4 离散时间 LTI 系统的特征函数

这个练习要检验离散时间 LTI 系统的特征函数性质。复指数是 LTI 系统的特征函数，也就是说当输入序列是某一复指数时，输出就是同样的复指数乘以一个复常数，这个常数可以由单位脉冲响应 $h[n]$计算出来。当一个离散时间 LTI 系统的输入是 $x[n]=z^n$ 时，输出就是 $y[n]=H(z)z^n$，式中

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

现考虑下列各输入信号：

$$x_1[n]=e^{j(\pi/4)n}$$

$$x_2[n]=\sin(\pi n/8+\pi/16)$$

$$x_3[n]=(9/10)^n$$

$$x_4[n]=n+1$$

当每个信号是由下面线性常系数差分方程：

$$y[n]-0.25y[n-1]=x[n]+0.9x[n-1] \tag{3.3}$$

描述的因果 LTI 系统的输入时，要计算输出 $y_1[n]\sim y_4[n]$。

基本题

(a) 利用冒号(:)算符，创建一个包含在区间 $-20\leqslant n\leqslant 100$ 内时间序号的向量 n，利用这个向

量,定义 x1,x2,x3 和 x4 为包含这 4 个信号 $x_1[n]\sim x_4[n]$在向量 n 区间内的值。在这个区间内对每个信号画出一幅有清晰标注的图。因为向量 x1 是复数,需要分别对实部和虚部作图。可以用 subplot 或 hold 把它们组合在一幅图上。

(b) 2.2 节介绍的 filter 命令可以计算对某一给定输入序列时由差分方程描述的因果 LTI 系统的输出。定义向量 a 和 b 用以表征由(3.3)式所示的系统,用这两个向量和 filter 计算当输入分别是 x1～x4 时,包含由(3.3)式表征的系统输出的向量 y1,y2,y3 和 y4。对于求得的每个输出,在区间 $0\leqslant n\leqslant 100$ 上画出适当标注的图。对于 y1 还是需要分别画出实部和虚部的图。将输入和输出的图作比较,指出哪些输入是这个 LTI 系统的特征函数。

注意:在这一部分和下面部分都略去在区间 $-20\leqslant n\leqslant -1$ 内的输出样本。因为 MATLAB 不能在无限长的输入信号下工作,这些样本包括了由于该系统的自然响应所产生的暂态。MATLAB 都认为在给出 x 的值之前,输入和输出都是零,系统的特征函数性质仅仅涉及的是稳态解。在这个练习中的信号和系统都已经造成确保暂态在 20 个样本之内完全消失,所以将检验的区间限制在 $0\leqslant n\leqslant 100$,致使所选取的这部分输出自然响应的影响已不起作用。

(c) 这一部分要确认哪些输入是特征函数,并计算对这些特征函数相应的特征值。如果向量 x 和 y 是某一系统的输入和输出序列,而输入序列是该系统的特征函数,那么 y 就应该等于 x 乘一个常数。这可以用计算 H=y./x 证明,它算出了在每个时间序号上输出和输入序列的比值。如果所得到的向量 H 是一个常数,那么这个输入信号就是该系统的特征函数。对求得的每个输入/输出信号对计算 H1～H4,并在区间 $0\leqslant n\leqslant 100$ 内画出适当标注的 H 图。H1 还是要求对其实部和虚部画出单独的图。对于是该系统特征函数的输入,由所得图或由向量 H 求特征值 $H(z)$。

3.5 用离散时间傅里叶级数综合信号

离散时间傅里叶级数(DTFS)是周期离散时间序列的一种频域表示,DTFS 的综合与分析公式由(3.1)和(3.2)式给出。这个练习包括有 3 组习题用于对这两个公式进行实际操作。基本题是用 DTFS 系统综合一个很简单的周期离散时间信号。中等题是既要分析一组周期离散时间信号,以求得它们的 DTFS 系数,又要用一次加入几个系数的办法重构其中的一个信号。深入题要写出根据一个周期的样本,对任意周期离散时间信号求 DTFS 系数的函数。

基本题

在这些习题中,用 $N=5$ 和下面 DTFS 系数

$$a_0=1, a_2=a_{-2}^*=e^{j\pi/4}, a_4=a_{-4}^*=2e^{j\pi/3}$$

综合一个周期离散时间信号。

(a) 根据这些 DTFS 系数,能预计 $x[n]$是复数值、纯实数值或者纯虚数值吗？为什么？

(b) 利用上面给出的 DTFS 系数,确定 $a_0\sim a_4$ 的值,并将这些值存入向量 a 中。

(c) 利用 DTFS 系数的向量 a 和综合公式,定义一个新的向量 x 包括 $x[n]$在 $0\leqslant n\leqslant 4$ 内一个周期的值。既可以明确地写出求和式,或者利用 for 循环求它。利用 stem 产生一个在 $0\leqslant n\leqslant 4$ 上适当标注的 $x[n]$的图。在(a)中所作的预期是正确吗？注意,如果预计的是一个

纯虚或纯实值信号，仍然可以有很小的非零实部或虚部，因为有舍入误差的缘故。如果是这样，在画图之前，按需要利用 real 或 imag 置这一部分为零。

中等题

这些习题要检验几个不同方波信号的 DTFS 表示，具体说就是看看下列信号：

$$x_1[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 7\end{cases} \tag{3.4}$$

$$x_2[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 7\\ 0, & 8\leqslant n\leqslant 15\end{cases} \tag{3.5}$$

$$x_3[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 7\\ 0, & 8\leqslant n\leqslant 31\end{cases} \tag{3.6}$$

其中，$x_1[n]$，$x_2[n]$和 $x_3[n]$的周期分别为 $N_1=8$，$N_2=16$ 和 $N_3=32$。

(d) 定义表示 $x_1[n]$，$x_2[n]$和 $x_3[n]$每个信号一个周期内的值的 3 个向量 x1，x2 和 x3，利用这 3 个向量画出在 $0\leqslant n\leqslant 63$ 范围内每个信号的图，并作适当标注。注意：为了覆盖这一样本区间，必须要重复使用这些向量。

(e) 练习 3.1 说明了如何根据信号一个周期内的值，利用 fft 计算周期离散时间信号的 DTFS。利用这个 fft 函数，定义向量 a1，a2 和 a3 分别是 $x_1[n]\sim x_3[n]$的 DTFS 系数。利用 abs 和 stem 产生每个 DTFS 系数序列幅值的图，并作适当标注。根据(d)中的时域图和(3.2)式，应该能够预计 a1(1)，a2(1)和 a3(1)的值——这 3 个信号的直流(DC)分量。所预计的值与应用 MATLAB 所得结果相符吗？

(f) 这一部分要考查当综合 $x_3[n]$时，每次用若干个系数，看看 $x_3[n]$如何变化。利用前面所求得的向量 a3，定义向量 x3_2，x3_8，x3_12 和 x3_all 对应于下面 4 个信号：

$$x_{3_2}[n]=\sum_{k=-2}^{2}a_k e^{jk(2\pi/32)n}$$

$$x_{3_8}[n]=\sum_{k=-8}^{8}a_k e^{jk(2\pi/32)n}$$

$$x_{3_12}[n]=\sum_{k=-12}^{12}a_k e^{jk(2\pi/32)n}$$

$$x_{3_\mathrm{all}}[n]=\sum_{k=-15}^{16}a_k e^{jk(2\pi/32)n}$$

其区间为 $0\leqslant n\leqslant 31$。注意，因为 $x_3[n]$为实信号，所以这个信号的 DTFS 系数是共轭对称的，即 $a_k=a^*_{-k}$。因为 a_k 是共轭对称的，并且除 $x_{3-\mathrm{all}}[n]$外，其余的 3 个和式都是关于 $k=0$ 对称的，所以得出的信号应该是纯实数信号。如果不明白为什么这是对的，可以再复习一下 DTFS 的对称性质。由于在 MATLAB 运算中的舍入误差，需要利用 real 对已综合出的信号除去那些很小的虚部分量。以上给出的和式除了表示 a_k，$k=0,\cdots,31$ 的向量 a3 作为[a3(1)，…，a3(32)]外，都是关于 $k=0$ 对称的，所以在实现这个和式时，就需要确定 a 中的哪些元素相应于 k 的负值。

(g) 论证 $x_{3-\mathrm{all}}[n]$一定是实信号。

(h) 利用 stem 产生一个给予适当标注图的序列证明所创建的信号随着更多的 DTFS 系数被包括在这个和式中的话是怎样收敛到 $x_3[n]$的。具体一些就是 x3_all 应该等于原向量

x3(在 MATLAB 舍入误差的范围内)。这个离散时间方波的综合展现出吉布斯现象吗?

深入题

这个习题要写出一个计算周期信号 DTFS 系数的函数。这个函数应该取标定信号 $x[n]$ 在一个周期内的值的向量 x 和标定 x 的第 1 个样本的时间序号 n 的向量 n_init 作为宗量。这个函数应该得到含有 DTFS 系数 $a_0 \sim a_{N-1}$ 的向量 a,其中 N 是 x 中的样本个数,也就是 $x[n]$ 的周期。M 文件的第 1 行应读出

```
function a = dtfs(x,n_init)
```

验证这个函数对于计算下面给出信号的 DTFS 系数处理无误,并表明该函数的输出与以下输出一致。

```
>> dtfs([1 2 3 4],0)
ans=
  2.5000     -0.5000+0.5000i     -0.5000     -0.5000-0.5000i
>> dtfs([1 2 3 4],1)
ans=
  2.5000     0.5000+0.5000i     0.5000+0.0000i     0.5000-0.5000i
>> dtfs([1 2 3 4],-1)
ans=
  2.5000     -0.5000-0.5000i     0.5000-0.0000i     -0.5000+0.5000i
>> dtfs([2 3 4 1],0)
ans=
  2.5000     -0.5000-0.5000i     0.5000     -0.5000+0.5000i
>> dtfs([ones(1,4)  zeros(1,4)],0)
ans=
  Columns 1 through 4
  0.5000     0.1250-0.3018i     0     0.1250-0.0518i
  Columns 5 through 8
       0     0.1250+0.0518i     0     0.1250+0.3018i
>> dtfs([ones(1,4)  zeros(1,4),2])
ans=
  Columns 1 through 4
  0.5000     -0.3018-0.1250i     0     0.0518+0.1250i
  Columns 5 through 8
       0     0.0518-0.1250i     0     -0.3018+0.1250i
```

3.6 连续时间傅里叶级数性质

本练习要检验周期连续时间信号的连续时间傅里叶级数(CTFS)表示的性质。考虑信号

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t) \tag{3.7}$$

式中 $\omega_0 = 2\pi$。为了用 MATLAB 对该信号求值，利用时间向量

```
>> t=linspace(-1,1,1000);
```

它创建了在 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 范围内 1 000 个时间样本的向量。

中等题

(a) 满足 $x_1(t) = x_1(t+T)$ 的最小周期 T 是多少？利用这个 T 值，用解析法求 $x_1(t)$ 的 CTFS 系数。

(b) 考虑信号 $y(t) = x_1(t) + x_1(-t)$，利用 CTFS 的时间倒置和共轭性质求 $y(t)$ 的 CTFS 系数。

(c) 在 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 上画出信号 $y(t)$。能预期出什么样的对称性？能够利用 CTFS 的对称性质说明它吗？

(d) 考虑信号 $z(t) = x_1(t) - x_1^*(t)$。利用 CTFS 的时间倒置和共轭性质求 $z(t)$ 的 CTFS 系数。

(e) 在 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 上画出信号 $z(t)$。能预期出什么样的对称性？能够利用 CTFS 的对称性质说明它吗？

(f) 利用

$$x_2(t) = \cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}\sin(2\omega_0 t) \tag{3.8}$$

重复(a)～(e)。注意，$x_2(t)$ 是复信号。当画出 $x_2(t)$，$y(t)$ 和 $z(t)$ 时，务必分别画出它们的实部和虚部，并将所看到的每种对称性记下。

3.7 连续时间傅里叶级数中的能量关系

一个硬限幅器(hard-limiter)是一种器件，其输出是即时输入信号符号的函数，具体地说就是当输入信号 $x(t)$ 是正时，输出信号 $y(t)$ 等于 1；而当 $x(t)$ 是负时，$y(t)$ 等于 -1。调频(FM)的某些实现或雷达系统中都常用硬限幅器处理某一即时输入信号的相位，而不管任何可能的幅度失真。在本练习中要考虑将信号 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$ 通过硬限幅器产生 $y(t)$ 的问题。

中等题

(a) 求信号 $y(t)$ 的 CTFS 表示。**提示：**利用 CTFS 性质，并根据周期为 T 的对称方波

$$s(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/4 \\ 0, & T/4 \leqslant |t| \leqslant T \end{cases} \tag{3.9}$$

具有 CTFS 系数 a_k 为

$$a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k}$$

的知识。

(b) 一个周期信号的基波分量的能量可以定义为 $|a_1|^2 + |a_{-1}|^2$，其中 a_k 是该信号的 CTFS。试计算输出 $y(t)$ 和输入 $x(t)$ 中基波分量的能量，能量有增益或损失吗？能说明能量变化的原因吗？

值，利用 x_20 创建向量 x 包含了 $-20\leqslant n\leqslant 99$ 内的 $x[n]$ 的 6 个周期；同时定义向量 n 是该区间内的样本序号，利用 stem 产生在该区间内 $x[n]$ 的图。

(e) 当 $x[n]$ 为系统 1 和系统 2 的输入时，利用 filter 计算它们的输出 y1 和 y2，并用 stem 画出在 $0\leqslant n\leqslant 99$ 内的两个输出。根据这些图，陈述一下哪个输出包含了较多的高频能量，哪个有更多的低频能量。这些图确认了(c)中的答案吗？

(f) 定义 y1_20 和 y2_20 是对应于 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 的 y1 和 y2 在 $0\leqslant n\leqslant 19$ 的部分，利用这些向量和 fft 计算 y1 和 y2 的 DTFS 系数 a_y1 和 a_y-2，利用 stem 和 abs 产生这两个序列的 DTFS 系数的幅值图。这些图与(e)的答案相符吗？

3.9　连续时间系统的频率响应

这个练习要说明连续时间系统的频率响应对周期信号的作用效果。要检查一个简单的线性系统对组成一个周期信号的每个谐波分量的响应，以及对周期信号本身的响应。本练习需要用到 3.3 节讨论的 lsim 函数。

考虑一简单 RC 电路，其系统函数为

$$H(s)=\frac{1}{1+RCs}$$

输入是

$$x(t)=\cos(t)$$

输出为 $y(t)$。下面的习题全部仿真都用 t=linspace(0,20,1000)，并假设时间常数 $RC=1$。

中等题

(a) 用函数 lsim 仿真系统 $H(s)$ 对 $x(t)$，$0\leqslant t\leqslant 20$ 的响应，将该响应以信号 $y(t)$ 存储在同一张图上 1 画出输出 $y(t)$ 和输入 $x(t)$，$10\leqslant t\leqslant 20$，并注意从输入到输出幅值和相位的变化。能够用频率响应解释这些变化吗？**提示：**当输入 $x(t)=\cos(t)$ 时，用系统函数 $H(s)$ 求输出 $y(t)$ 的真正式子。

(b) 现在看看系统对方波的响应，该方波是首先将 $x(t)$ 通过一个硬限幅器，$x_2(t)=\text{sign}(\cos(t))$，得到的。用选择序号产生方波的一种简单方法是：

```
>> x2 = cos(t);
>> x2(x2>0) = ones(size(x2(x2>0)));
>> x2(x2<0) = -ones(size(x2(x2<0)));
```

创建信号 x2 并用 lsim 仿真该系统对方波的响应，在区间 $10\leqslant t\leqslant 20$ 内画出所得输出 $y_2(t)$

深入题

(c) 用解析方法算出方波 x2 的 CTFS，为此首先找到信号 $x(t)$ 和在(3.9)式定义的 $s(t)$ 之间的关系是有助于求解的。用 10 个最低频率的 x2 的非零 CTFS 系数创建前 5 个谐波分量。例如，若有存入向量 apos_k 和 aneg_k 的正负 CTFS 系数，就能构成输入的一次谐波为

```
>> s1 = apos_k(1) * exp(j * t) + aneg_k(1) * exp(-j * t);
```

构造信号 s1,s2,s3,s4 和 s5,在同一张图上和方波 x2 一起画出这些信号的和。

(d) 由于系统是线性的,系统对方波输入的响应可以用系统分别到每个谐波分量的响应,然后将这些结果相加而计算出来。用 lsim 求对信号 s1,…,s5 的响应 y1,…,y5,以及系统对信号 ssum(前 5 个谐波 s1～s5 之和)的响应来验证它。

(e) 将系统对前 5 次谐波之和的响应与系统对原方波的响应作一比较,请解释为什么这两个响应如此相象? **提示**:将 x2 的 CTFS 中的能量作为在 x2 近似中所用的系数个数的函数来考虑。

(f) 用由系统函数 $H(s)$和 x2 的 CTFS 构成每个信号验证信号 y1,…,y5 是正确的,对每个信号在 $10\leqslant t\leqslant 20$ 内画出用解析方法确定的和用仿真得到的信号。

3.10 离散时间傅里叶级数的计算

计算 DTFS 的 FFT 算法

一个基波周期为 N 的周期离散时间信号的 DTFS 由(3.2)式给出。

深入题

(a) 论证计算每个系数 a_k 要求作 $N+1$ 次复数乘法和 $N-1$ 次复数加法,假设函数 $e^{-jk(2\pi/N)n}$ 不要求任何计算。利用这个结果,为了计算基波周期为 N 的信号的 DTFS 需要多少次运算? 注意,需要的运算次数是与具体信号 $x[n]$无关的。

虽然对于分析很多信号与系统中,DTFS 是有用的,但是它的普遍性部分地是由于一种称之为快速傅里叶变换(FFT)的快速算法存在的缘故。在 1965 年,Cooley 和 Tukey 发表了他们具有里程碑性质的文章之前①,对于计算 DTFS 系数所用的最快算法要求 $\mathcal{O}(N^2)$量级的运算次数($\mathcal{O}(N^2)$量级运算是指要求的复数加法和乘法次数是 N 的二次多项式。当表征一种算法的计算复杂性增长时,较低次项可以略去,因为对大的 N 来说,它们可以忽略不计)。然而由 Cooley 和 Tukey 所提出的 FFT 算法仅要求 $\mathcal{O}(N\log N)$量级的运算次数。对于大的 N 值,所节省的计算量是很可观的。例如,若 $N=800$,试比较一下 $N^2=1\times10^6$ 与 $N\log N=3\times10^3$,相差有 3 个数量级。FFT 基本上可以将傅里叶分析用到很大周期的信号中去。下面习题要求画出由 FFT 要求的运算次数,并将其与 $\mathcal{O}(N^2)$算法作比较。

下面两个部分,假设 $x[n]$的基波周期为 N,并在区间 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内取值为 $x[n]=(0.9)^n$。

(b) 若至今尚未做过在练习 3.5 中写 dtfs **深入题**的话,现在就做一下。要将这个算法要求的计算量与 fft 要求的计算量作比较。按照如下程序可以利用 MATLAB 内部的 flops(浮点运算,即加法和乘法)计数器测量用 dtfs 实现(3.2)式的运算次数:

```
>> x=(0.9).^[0:N-1]; % create one period of x[n]
>> flops(0); % set MATLAB's internal computation counter to 0
```

① J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", Mathematics of Computation, 1965,19(89-92),pp.297-301.

≫ x = dtfs(x,0); % Store the DTFS of x[n] in X

≫ c = flops; % Store the number of operations in c

对于 $N=8,32,64,128$ 和 256 用 dtfs 计算 x 求 c,将这些值存入向量 dtfscomps 中。

(c) 现在,用 3.1 节介绍的 fft 计算 $N=8,32,64,128$ 和 256 时 $x[n]$ 的 DTFS 系数。用 flops 对每个 N 值求运算次数,并将这些值存入向量 fftcomps 中。利用 loglog 画 dtfscomps 和 fftcomps 对 N 的图。将 fft 要求的运算次数与 dtfs 要求的运算次数比较情况如何?尤其是对大的 N 值时。

如果将计算量的节省定义为慢算法的运算次数与快速算法的运算次数之比,那么由 FFT 给出的节省将随 N 的增加而增加(其比大致为 $N/\log N$)。

用 FFT 做周期卷积

在很多应用中,LTI 系统是用周期卷积实现的。在下面习题中,要用两种不同的方法来实现两个离散时间信号的周期卷积,其中之一就是利用由 FFT 所提供的高效计算。两个基波周期都为 N 的周期离散时间信号 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的周期卷积是

$$y[n]=\sum_{r=0}^{N-1}x[r]h[n-r] \tag{3.11}$$

(d) $y[n]$ 的基波周期 N_y 是什么?论证按照(3.11)式直接实现这个周期卷积要求 $\mathcal{O}(N^2)$ 量级的运算(加法和乘法)。记住,为了表征整个信号,计算出 $y[n]$ 的一个周期就足够了。

(e) 假定 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的基波周期为 $N=40$,并已知在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内,$x[n]=(0.9)^n$,$h[n]=(0.5)^n$。计算 $x[n]$ 与 $h[n]$ 的周期卷积,并画出 $y[n]$,$0\leqslant n\leqslant N_y-1$。将由 flops 给出实现这个卷积要求的运算次数存入向量 f40c。记住,在创建代表 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的向量 x 和 h 之后,要置 flops(0)。**提示:**为了实现这个周期卷积,首先将区间 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内的 $x[n]$ 和 $h[n]$ 分别存入行向量 x 和 h 中,置 flops(0),然后用 conv([x x],h)。周期卷积可以从这个信号的一部分中提取出来。

(f) 对 $N=80$ 重覆(e),画出 $y[n]$ 的一个周期,并将运算次数存入 f80c 中。

(g) 假设 $x[n]$ 和 $h[n]$ 如(e)所定义,利用 DTFS 的周期卷积性质实现周期卷积①,即按 3.1 节所述用 fft 计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 DTFS 系数,然后用周期卷积性质构成 $y[n]$ 的 DTFS 系数。最后用 ifft 由 DTFS 系数综合出 $y[n]$。ifft 算法几乎与 FFT 一样,对基波周期为 N 的信号也要求 $\mathcal{O}(N\log N)$ 次运算量级。为了校验实现的真实性,画出区间 $0\leqslant n\leqslant N_y-1$ 内的 $y[n]$,并将它与在(e)中的计算结果作比较。记住,正如在 3.1 节所讨论的,由于数值计算中的舍入误差,信号 $y[n]$ 可能有小的虚部分量。将计算 $y[n]$ 要求的总运算次数存入 f40f 中,并记住在创建用 MATLAB 的 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的表示之后置 flops(0)。

(h) 对 $N=80$,重覆做(g),画出 $y[n]$ 的一个周期,并将运算次数存入 f80f 中。将 $y[n]$ 与(f)中的结果作比较再次校验实现的真实性。

(i) 计算 f40c 对 f40f 和 f80c 对 f80f 的比。对于 $N=40$ 和 $N=80$ 比较这两个比值情况如何?对每个 N 值,哪种方法更为高效?对 $N>80$ 愿选哪种方法?陈述理由。

---

① 譬如见"Signals and Systems"中的表 3.2。

3.11 用傅里叶级数综合连续时间信号Ⓢ

一大类连续时间周期信号可以表示成下列和式：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\mathrm{i}k(2\pi/T)t} \tag{3.12}$$

式中 a_k 是连续时间傅里叶级数(CTFS)。(3.12)式常称为 CTFS 综合公式。本练习要综合具有较少非零系数个数的信号，练习 3.12 将考虑具有无限个非零 CTFS 系数的连续时间信号的傅里叶分析与综合。

基本题

对于这些习题要用少数几个非零的傅里叶级数系数构造周期信号的符号表达式。3 个信号的基波周期和非零的 CTFS 系数给出如下：

(a) $x_1(t)$: $T=1$; $a_1=a_{-1}=5$; $a_3=a_{-3}=2$

(b) $x_2(t)$: $T=2$; $a_1=a_{-1}^*=\mathrm{i}$; $a_2=a_{-2}^*=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$, $a_3=a_{-3}^*=\frac{1}{4}\mathrm{i}$, $a_4=a_{-4}^*=-\frac{1}{8}\mathrm{i}$

(c) $x_3(t)$: $T=4$; $a_1=a_{-1}^*=\mathrm{i}$, $a_2=a_{-2}^*=\frac{1}{2}\mathrm{i}$, $a_3=a_{-3}^*=\frac{1}{4}\mathrm{i}$, $a_4=a_{-4}^*=\frac{1}{8}\mathrm{i}$

对每一信号创建连续时间信号的符号表达式，并用 ezplot 画出信号的两个周期。

若已知 $x_2(t)$ 的图，如何能由两个信号的傅里叶级数系数预计 $x_3(t)$ 的图？如何本来就能根据傅里叶系数预计出 3 个信号中的每一个都应该是实信号？

中等题

定义

$$\operatorname{sign}(k) = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \\ -1, & k < 0 \end{cases}$$

并考虑具有下面基波周期 T 和傅里叶级数系数 $\{a_k\}$ 的信号：

(d) $x_4(t)$:

$$T = 5; \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{(k^2+1)}, & |k| \leqslant K \\ 0, & |k| > K \end{cases}$$

(e) $x_5(t)$:

$$T = 20; \qquad a_k = \begin{cases} \operatorname{sign}(k)\dfrac{\mathrm{i}}{(-2)^{|k|}}, & |k| \leqslant K \\ 0, & |k| > K \end{cases}$$

(f) $x_6(t)$:

$$T = 5; \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{|k+2|}}, & |k| \leqslant K \\ 0, & |k| > K \end{cases}$$

对每一信号,令 $K=1,3$ 和 9。对每个 K 值,创建对 $x_n(t)(n=4,5,6)$ 的符号表达式,并用 ezplot 画出各信号的两个周期。如果信号为复数,要单独分开画出它们的实部和虚部。**提示:** 在利用 symsum 之前,对 $x_i(t)$ 创建符号表达式,用 symmul 创建 $a_k e^{ik(2\pi/T)t}$ 的符号表达式,该符号表达式一定是 t 和 k 的函数。

另外,compose 也能用于选取一个符号表达式的实部或偶部分量,即 compose('real(x)',x1)提取对 $x_1(t)$ 的符号表达式 x1 的实部分量。

(g) 怎样本就能由傅里叶级数系数预计到哪个信号应该是实信号?

深入题

(h) 这一部分要写出一个 M 文件,当 CTFS 系数在区间 $-K \leqslant k \leqslant K$ 以外是零时,该 M 文件从 CTFS 系数综合出信号 $x(t)$。M 文件的第 1 行应读出

```
function x=ctsynth(a,T,K)
```

其中 T 是 $x(t)$ 的基波周期,a 是包含 $-K \leqslant k \leqslant K$ 内的 CTFS 系数 a_k 的符号阵列。务必用程序确认 a 是一个具有 $2K+1$ 个元素的符号阵列。这个函数应该产生对信号 $x(t)$ 的符号表达式 x。用在**基本题**和**中等题**中的某些信号验证这个函数,例如由下列程序应该创建在(a)中 $x_1(t)$ 的符号表达式

```
>> T=1;
>> K=3;
>> a=sym('[2 0 5 0 5 0 2]');
>> x=ctsynth(a,T,K);
```

3.12 方波和三角波的傅里叶表示Ⓢ

具有基波周期为 N 的连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶级数综合公式由(3.12)式给出。一般来说,傅里叶级数系数可有无限个非零值。譬如,任何具有间断点的信号都一定有一个无限个非零系数的傅里叶级数表示,而对数值计算来说,这是无法实现的。有限项和

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik(2\pi/T)t} \tag{3.13}$$

对某个相对小的整数 N 往往是一个很好的近似。(3.13)式常称作 $x(t)$ 的截断傅里叶级数表示。

这个练习要用傅里叶级数分析两个常见的连续时间信号——周期方波和周期三角波,对每个信号将研究截断的傅里叶级数综合公式,特别是要研究随 N 的增大,$x_N(t)$ 是如何收敛的。

方波

考虑一个基波周期 $T=2$ 的周期方波,在 $-1<t<1$ 区间内该方波由下式表示,并图示在图 3.6 中。

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

这个练习将分析该方波的傅里叶级数表示,且主要集中在方波中的不连续点附近。

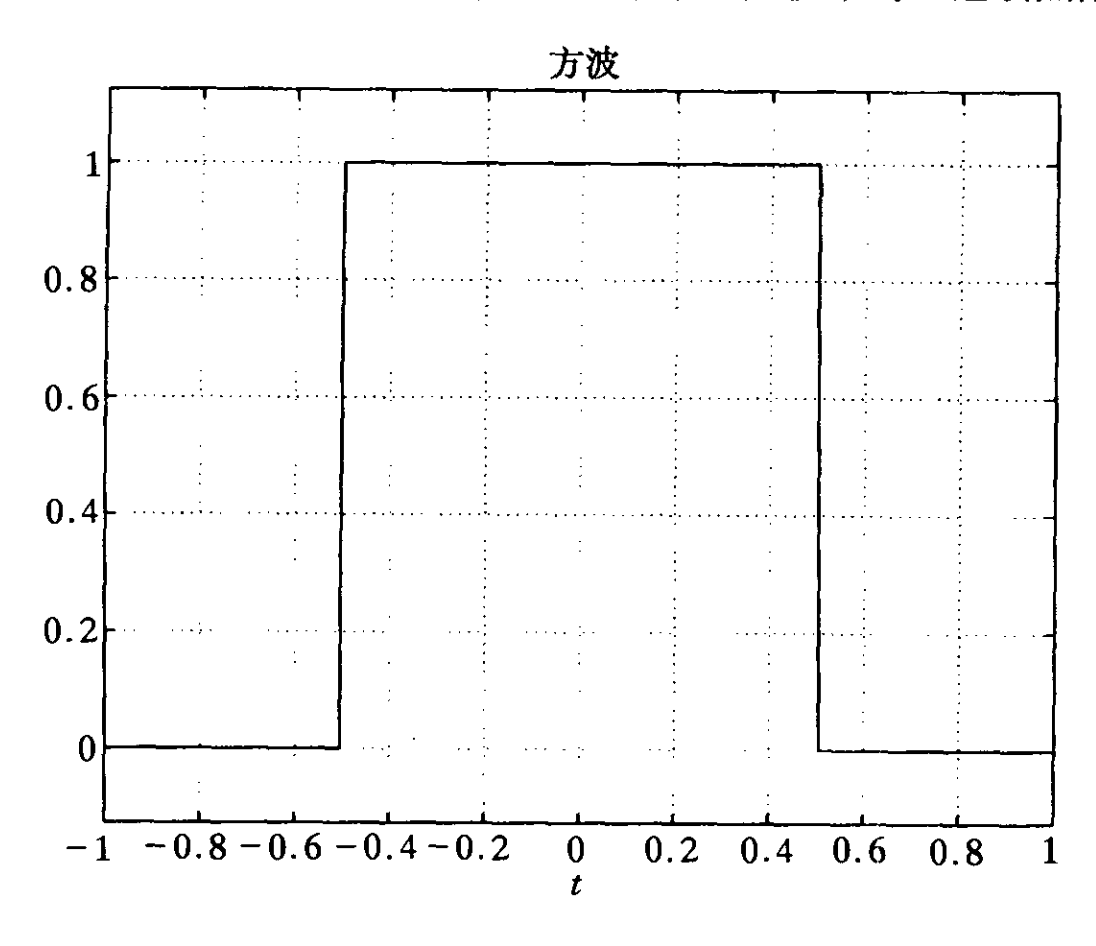


图 3.6 方波的一个单一周期

(a) 利用 int 创建一个符号表达式 a,它包含了该方波每个 k 值的傅里叶级数系数。这个符号表达式是 k 的函数,例如 a_5 由 numeric(subs(a,5,'k'))给出。尽量简化这个表达式。利用 numeric 和 stem 画出 $-10\leqslant k\leqslant 10$ 内的傅里叶级数系数。注意:取决于是怎样简化这个符号表达式 a,MATLAB 可能不能够对 $k=0$ 求 a,因为 MATLAB 不能求表达式像在 $k=0$ 的 sin(k)/k。这时,就得单独计算 a_0。

(b) 对 $N=1,3,5$ 和 9,对 $x_N(t)$创建符号表达式。利用 ezplot 画出区间 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 内的 $x_N(t)$,用 hold 将 4 张图画在同一幅图上。

(c) 在 $t=\pm 1/2$ 时,$x_N(t)$的值为多少? 这个值随 N 增加而变化吗?

(d) 不用明确地求出 $x_N(t)$,对每个 N 值估计一下超量误差值。这个超量误差随 N 增加而减小吗? 随着 $N\to\infty$,如何预期这个值的变化? (若有时间和资源的话,可以画一下 $N>9$ 的 $x_N(t)$)。

三角波

考虑一个基波周期 $T=2$ 的周期三角波。在 $-1<t<1$ 区间上,该三角波由 $x(t)=1-|t|$给出,如图 3.7 所示。虽然方波有一个零阶不连续点,而三角波则有一个一阶不连续点,也就是在斜率上有不连续点。下面的习题要分析该三角波的傅里叶级数表示,并将它的特性行为与方波的傅里叶级数表示作比较。应该能够利用在(a)~(d)中所用到的脚本文件的简单变化来做这些习题。

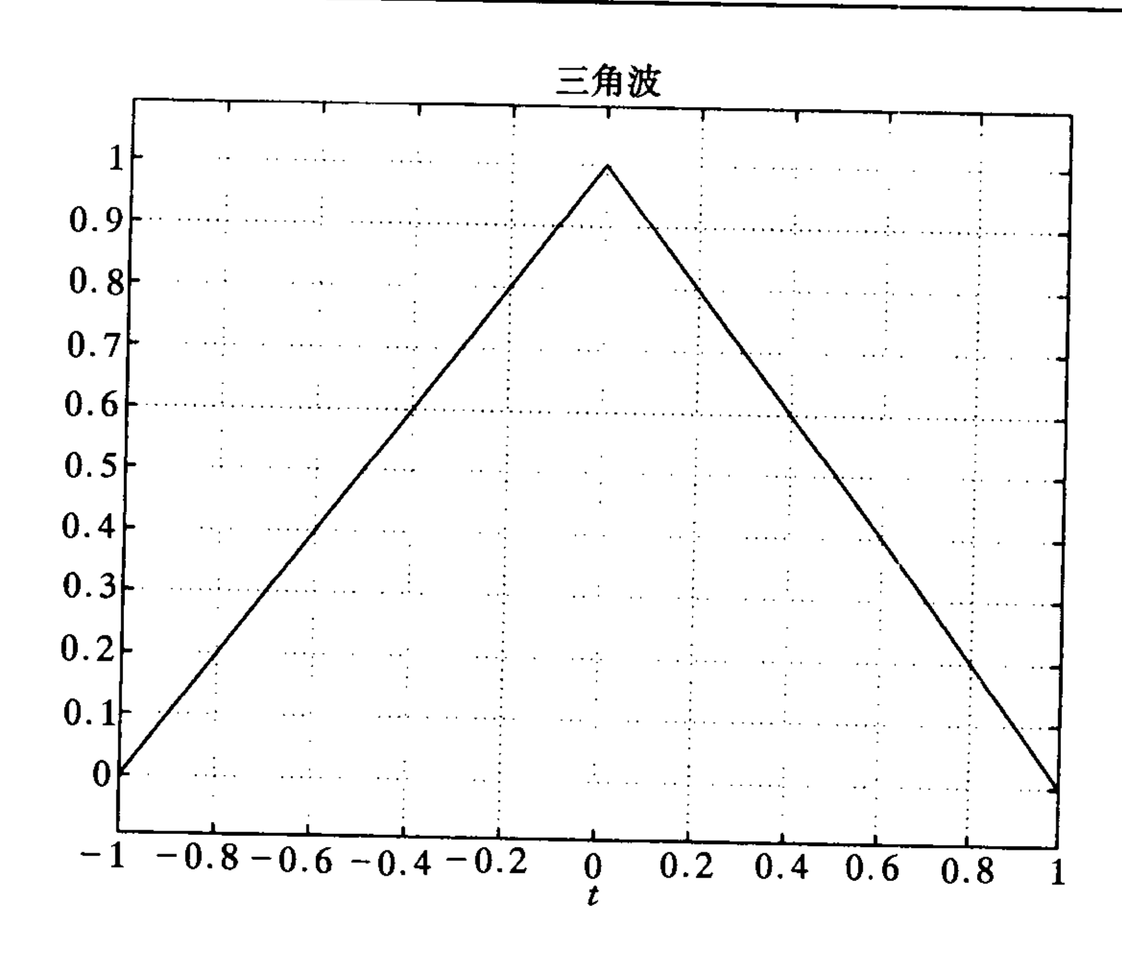


图 3.7 三角波的一个单一周期

深入题

(e) 利用 int 创建一个符号表达式 a,它包含了该三角波对每个 k 值的傅里叶级数系数。这个符号表达式是 k 的函数,例如 a_5 由 mumeric(subs(a,5,'k'))给出。尽量简化这个表达式。利用 numeric 和 stem 画出 $-10\leqslant k\leqslant 10$ 区间内的傅里叶级数系数。注意:MATLAB 可能不能够求 $k=0$ 的 a,因为 MATLAB 不能求表达式像 sin(k)/k 在 $k=0$ 的值,这时就要单独求 a_0。

(f) 对 $N=1,3,5$ 和 9,对 $x_N(t)$创建符号表达式。利用 ezplot 画出区间 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 内的 $x_N(t)$,对每个 N 值用不同的图。

(g) 增大 N,在 $t=0$,$x_N(t)$是怎样收敛的? 呈现的最大误差

$$\max_{-1<t<1} |x(t)-x_N(t)|$$

随 N 增大而减小吗? 将这一特性行为与截断的方波傅里叶级数近似比较情况怎样?

(h) 能用 diff 分析 $x_N(t)$是如何近似该三角波的导数的。对 $N=9$,利用 diff 从 $x_N(t)$的符号表达式中创建对 $\mathrm{d}x_N(t)/\mathrm{d}t$ 符号表达式。在 $-1<t<1$ 区间上画出这一导数。这个信号与(b)中的 $x_9(t)$比较如何? 怎样解释这一相似性?

3.13 连续时间滤波Ⓢ

考虑示于图 3.8 的 RL 电路。关联输入电压 v_s 和电阻上电压 v_r 的微分方程是

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}+v_r=v_s$$

基本题

(a) 假设电路初始松弛，v_s 和 v_r 之间的输入-输出关系可以用一个线性时不变(LTI)系统描述。利用计算 v_r 在对复指数输入 $v_s(t)=e^{j\omega t}$ 的响应中导出相应的频率响应 $H(j\omega)$。

(b) 余下练习部分都假设 $R=10\Omega$ 和 $L=1\text{H}$。对 $H(j\omega)$ 创建一个符号表达式。在两张图上分别利用 ezplot 画出 $H(j\omega)$ 的幅值和相位。务必在图上要展示出明显的通带和阻带部分。该系统是一个高通滤波器或是一个低通滤波器？

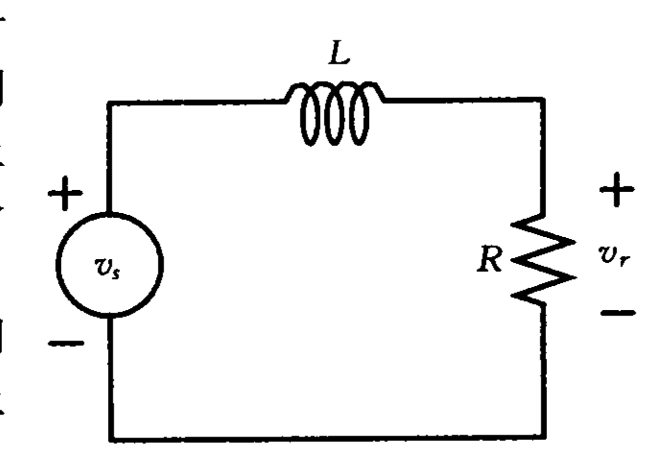
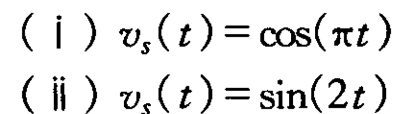


图 3.8 用 v_s 作为输入(电压源)的 RL 电路

(c) 用不着利用 MATLAB，或是作任何数值计算，利用 LTI 系统的特征函数性质确定对下列输入时电阻上的电压响应：



(i) $v_s(t)=\cos(\pi t)$

(ii) $v_s(t)=\sin(2t)$

中等题

(d) 利用 dsolve 解在(c)中所给出的每个输入下的微分方程。务必用 simple 简化所得表达式。如何解释在(c)中所得到的解和由 dsolve 所给出的解之间的差异？

(e) 利用在 2.3 节讨论的 step 和 impulse 分别画出电阻上电压的阶跃响应和单位冲激响应，利用电阻和电感的性质解释阶跃响应。

第 4 章

连续时间傅里叶变换

连续时间傅里叶变换(CTFT)

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{4.1}$$

$$X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

将连续时间傅里叶级数(CTFS)推广到既能对周期连续时间信号,又能对非周期连续时间信号进行频域分析。这是一种重要而强有力的方法,因为有很多信号当从时域来看时呈现出很复杂的结构,但从频域来看却很简单。另外,许多 LTI 系统的特性行为在频域要比时域容易理解得多。为了更有效地应用频域方法,重要的是要将信号的时域特性是如何与它的频域特性联系起来的建立直观的认识。本章练习就是要对一般的信号帮助建立这一直观性,尤其是在 LTI 系统的单位冲激响应和频率响应之间建立这一直观性。

4.1 节说明如何用 freqs 计算连续时间系统的频率响应。4.2 节给出一种计算 CTFT 数值近似的方法。4.3 节用声音信号说明 CTFT 性质。4.4 节包括了低通滤波器单位冲激响应和频率响应之间的关系。在练习 4.5 中说明函数 residue 用于计算复杂系统函数的单位冲激响应是有帮助的。练习 4.6 将幅度调制用于解出莫尔斯码的消息。最后,练习 4.7 用函数 fourier 以符号形式计算几个不同信号的 CTFT。

4.1 MATLAB 函数 freqs

一个稳定的 LTI 系统可以完全用它的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$ 来表征。若 $X(\mathrm{j}\omega)$ 是系统输入的 CTFT,那么

$$Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega)$$

就给出了系统输出的 CTFT。输入和输出满足线性常系数微分方程的 LTI 系统是一类重要系统,其部分原因是因为这些系统的频率响应很容易求得。即满足下面微分方程的 LTI 系统:

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k}=\sum_{m=0}^{M}b_m\frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} \tag{4.3}$$

其频率响应可直接得出为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{b_M(\mathrm{j}\omega)^M+b_{M-1}(\mathrm{j}\omega)^{M-1}+\cdots+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0}{a_N(\mathrm{j}\omega)^N+a_{N-1}(\mathrm{j}\omega)^{N-1}+\cdots+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0} \tag{4.4}$$

函数 freqs(b,a)能用于计算并画出这个频率响应,其中向量 b 和 a 分别内含系数 b_m 和a_k 。在

b 和 a 中系数的排列次序与对 lsim 输入所要求的次序是完全相同的(见 2.3 和 3.3 节)。这个次序由 b$(M-m+1)=b_m$ 和 a$(N-k+1)=a_k$ 给出。

现考虑一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=3x(t)$$

它描述的是一个因果、稳定的 LTI 系统的输入输出关系。这个系统的频率响应是

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{3}{3+\mathrm{j}\omega} \tag{4.5}$$

如果对 freqs(b,a)没有提供输出宗量的话,那么就将自动画出 $H(\mathrm{j}\omega)$的幅值和相位。执行以下命令

```
≫a=[1  3];
≫b=3;
≫freqs(b,a)
```

就得到图 4.1 给出的图。可以用(4.5)式自行确认图 4.1 中的幅值和相位图都是正确的。

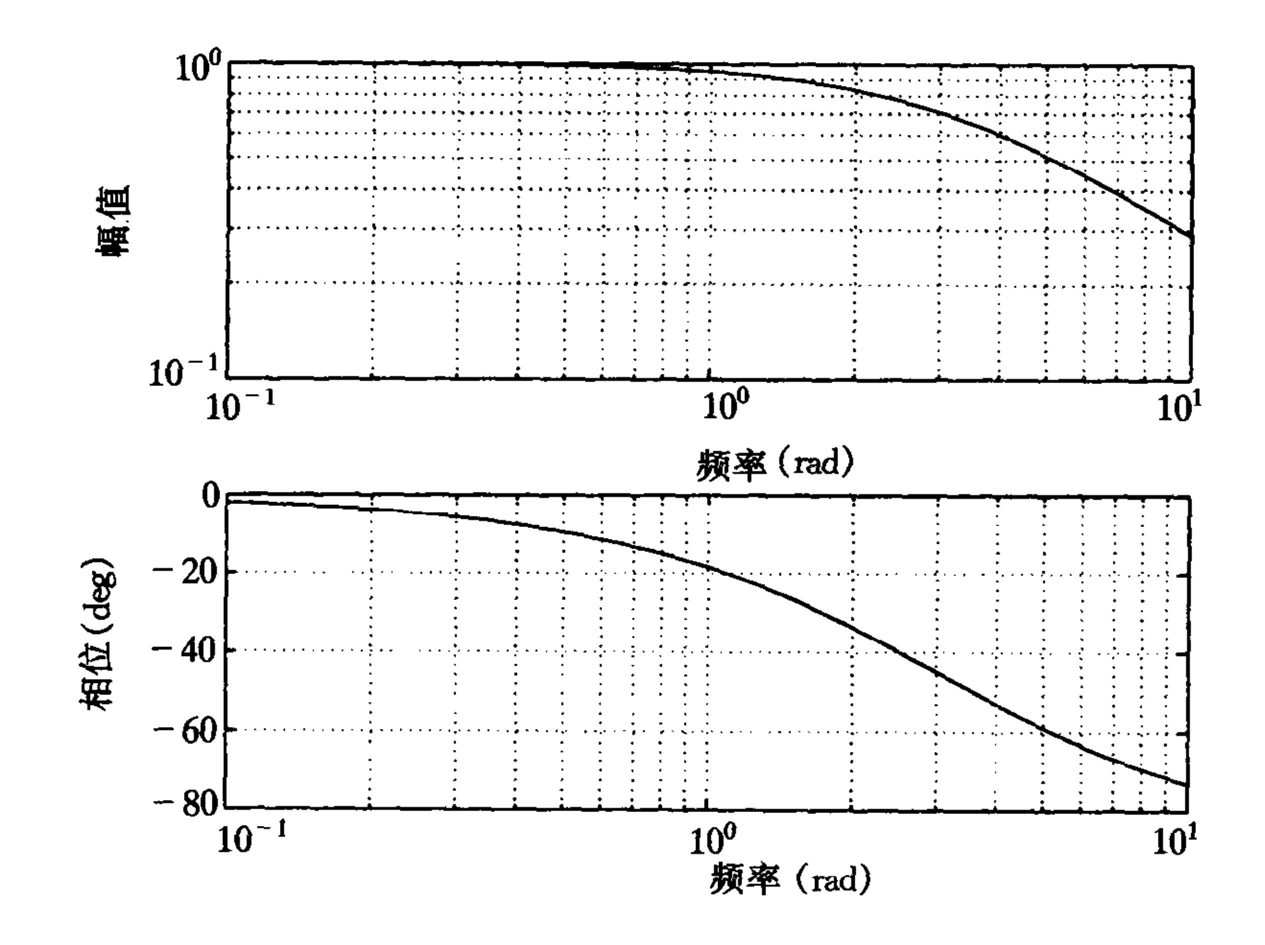


图 4.1 由 freqs(b,a)展示的频率响应。注意,频率和幅值坐标轴都是对数坐标,图中仅画出有限区间上的频率的响应

命令 freqs 自动选择画出 $H(\mathrm{j}\omega)$的频率范围。如果想要 $H(\mathrm{j}\omega)$在特定的 ω 值上画出,或者在一个不同于由 freqs 自动选定的频率范围内画出 $H(\mathrm{j}\omega)$,可以将这些频率作为输入给出。例如,执行以下命令:

```
≫w=linspace(0, 3*pi);
≫H=freqs(b,a,w);
```

就产生在 $0\leqslant\omega\leqslant3\pi$ 区间内,100 个等间隔 ω 上的$H(\mathrm{j}\omega)$。在 w 内的频率点上的 $H(\mathrm{j}\omega)$样本就在 H 中得到。H 的幅值图由图 4.2 给出。看看你是否能重复出这张图。

当然,freqs 也能用于计算或者画出由高阶微分方程描述的 LTI 系统的频率响应。请利用

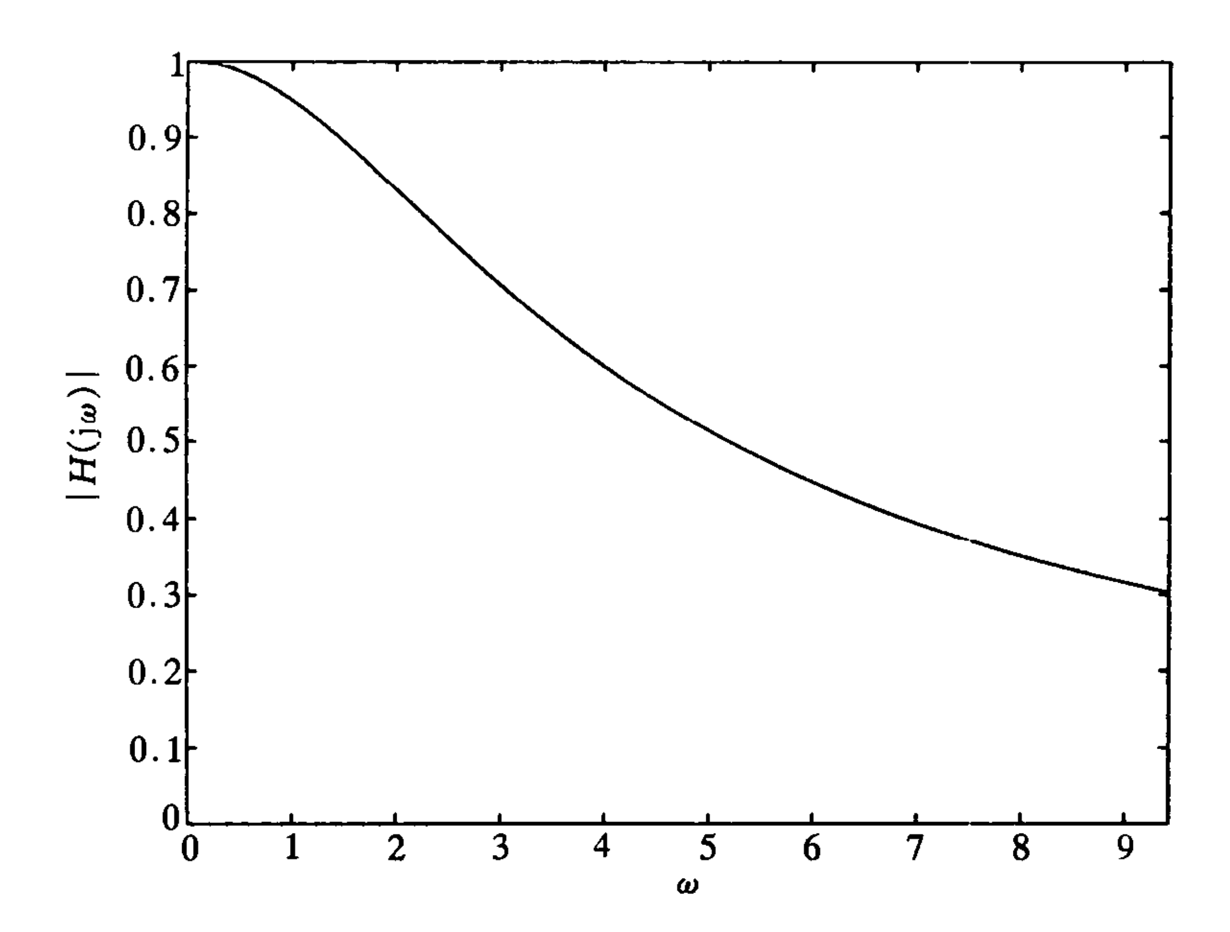


图 4.2　一阶系统当在 w= linspace(0, 3 * pi)频率上求值时频率响应的幅值 $|H(j\omega)|$

freqs 试试重新画出由图 4.3 给出的图，它是满足下面微分方程：

$$3\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5x(t) \tag{4.6}$$

的稳定 LTI 系统频率响应的幅值和相位。

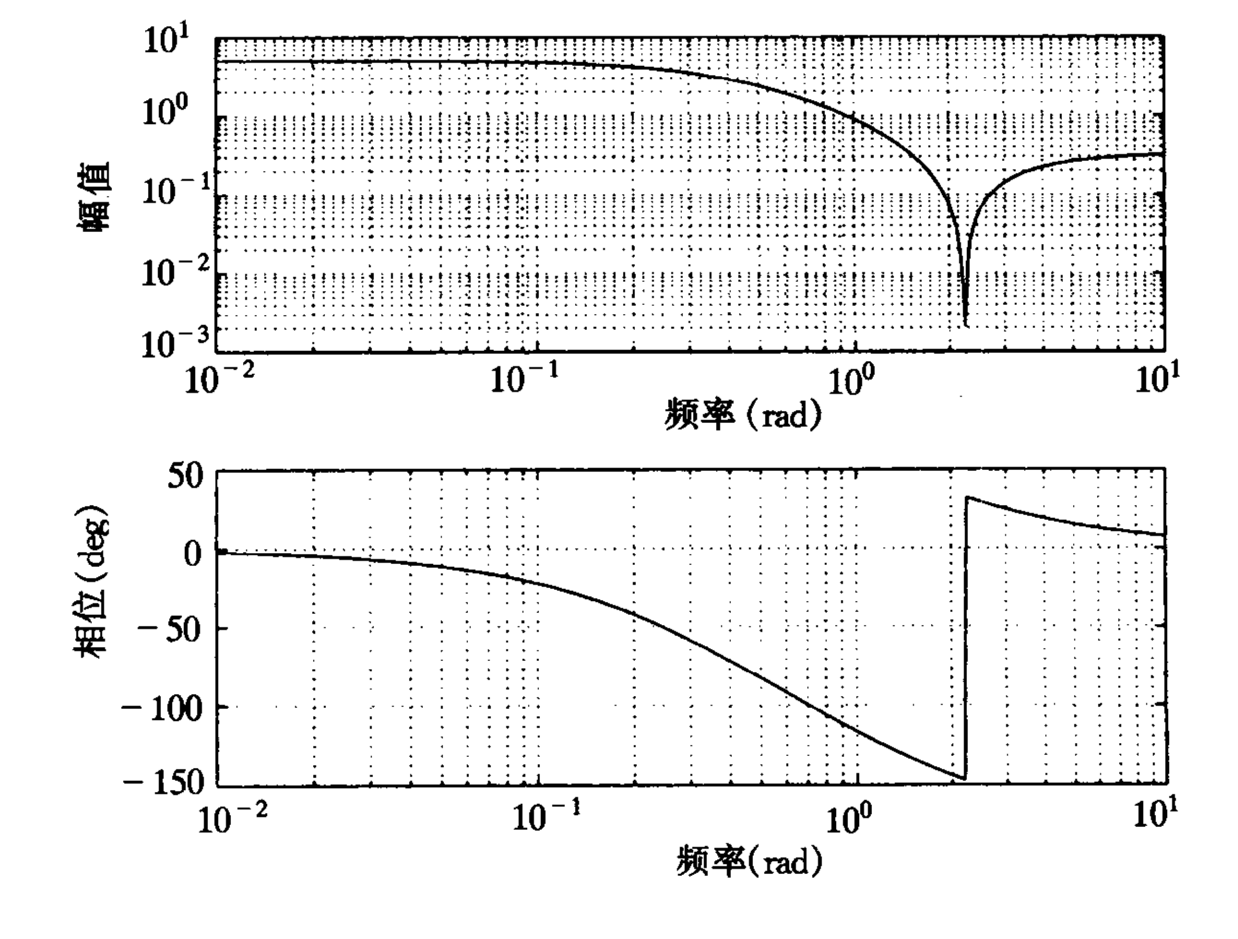


图 4.3　由(4.6)式给出的二阶系统频率响应的幅值和相位

4.2 连续时间傅里叶变换的数值近似

一大类信号都能用(4.1)式的连续时间傅里叶变换(CTFT)来表示。这个练习要用MATLAB计算(4.2)式(CTFT)积分的数值近似。利用在密集的等间隔 t 的样本上的求和来近似这个积分,就有可能用函数 fft 高效地计算这个近似值。所用的近似式是根据积分的定义得到的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \lim_{\tau\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau)e^{-j\omega n\tau}\tau$$

对于一大类信号,在足够小的 τ 下,上式右边的和式是对于 CTFT 积分一个好的近似。若信号 $x(t)$对于 $t<0$ 和 $t\geqslant T$ 为零,那么这个近似式就能写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{T} x(t)e^{-j\omega t}dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau)e^{-j\omega n\tau}\tau \tag{4.7}$$

式中 $T=N\tau$,N 为一整数。可以用函数 fft 对一组离散的频率 ω_k 计算(4.7)式中的和式。如果 N 个样本 $x(n\tau)$是存在向量 x 内的话,那么调用函数 X = tau * fft(x)就计算出

$$X(k+1) = \tau\sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau)e^{-j\omega_k n\tau}, \qquad 0\leqslant k < N \tag{4.8}$$

$$\approx X(j\omega_k) \tag{4.9}$$

式中

$$\omega_k = \begin{cases} \dfrac{2\pi k}{N\tau}, & 0\leqslant k\leqslant \dfrac{N}{2} \\ \dfrac{2\pi k}{N\tau} - \dfrac{2\pi}{\tau}, & \dfrac{N}{2}+1\leqslant k < N \end{cases} \tag{4.10}$$

以及 N 假设为偶数。为了计算高效,fft 在负的频率样本之前先产生正频率样本。为了将频率样本置于上升的顺序,能用函数 fftshift。为了将存入 X 中的 $X(j\omega_k)$的样本排列成使 X($k+1$)就是对于 $0\leqslant k\leqslant N-1$,在 $-\pi/\tau+(2\pi k/N\tau)$上求得的 CTFT,可用 X = fftshift(tau * fft(x))。

本练习要用函数 fft 和截断的 $x(t)$近似 $x(t)=e^{-2|t|}$的 CTFT。将会看到,对于足够小的 τ,对 $X(j\omega)$能计算出一个准确的数值近似。

基本题

(a) 求 $x(t)=e^{-2|t|}$CTFT 的解析表达式。可以发现,将 $x(t)$看作 $x(t)=g(t)+g(-t)$,$g(t)=e^{-2t}u(t)$,是有帮助的。

(b) 创建一个向量,它包含了对于 $\tau=0.01$ 和 $T=10$,在区间 t = [0:tau:T - tau]上,信号 $y(t)=x(t-5)$的样本。因为 $x(t)$对于$|t|>5$ 基本上为零,就能用 $N=T/\tau$ 由上面分析中计算出信号$y(t)=x(t-5)$的 CTFT。向量 y 的长度应为 N。

(c) 键入 Y = fftshift(tau * fft(y))计算样本 $Y(j\omega_k)$。

(d) 构造一个频率样本向量 w,它按照

```
>>w = -(pi/tau) + (0:N-1) * (2 * pi/(N * tau));
```

与存在向量 Y 中的值相对应。

(e) 因为 $y(t)$是通过时移与 $x(t)$相联系的,所以 CTFT $X(j\omega)$就以线性相移项 $e^{j5\omega}$与$Y(j\omega)$相联系。利用频率向量 w 直接由 Y 计算 $X(j\omega)$的样本,并将结果存入向量 X 中。

(f) 利用 abs 和 angle 画出在 w 标定的频率范围内 X 的幅值与相位。对于相同的 ω 值,也画出在(a)中所导出的 $X(j\omega)$解析表达式的幅值与相位。CTFT 的近似值与解析导得的相符吗? 若想在一张对数坐标上画出幅值的话,可以用 semilogy,这时会注意到,在较高的频率上近似不如在较低的频率上好。因为已经用了样本 $x(n\tau)$近似$x(t)$,所以在时间段 τ 长度内,信号变化不大的那些信号的频率分量近似程度会更好一些。

(g) 利用 abs 和 angle 画出 Y 的幅值和相位,它们与 X 的图比较后怎样? 能估计到这一结果吗?

4.3 连续时间傅里叶变换性质

这个练习要借助于在频域和时域分析与操作声音信号来加深理解连续时间傅里叶变换 CTFT。在 MATLAB 中声音信号是用含有连续时间声音信号样本的向量表示的,采样率定为 8 192Hz,也即声音信号是每隔 $\Delta t=(1/8\ 192)$s 采样一次。更仔细些,对于一个声音信号 $y(t)$,在 $0\leqslant t<N\Delta t$ 区间上,以 8 192 Hz 采样,代表该声音信号的 N 个元素向量 y 由下式给出:

$$y(n)=y((n-1)\Delta t),\qquad n=1,\cdots,N$$

然后,函数 sound 能用来在计算机的扬声器上放出该信号。

虽然这是一个连续时间声音信号 $y(t)$的采样表示,倘若 $y(t)$在采样区间以外是零,而且采样率 $f_s=8\ 192$ Hz 是足够快①,那么 y 就能认为是 $y(t)$的一个准确表示。对于本练习中的所有信号,y 都能认为是 $y(t)$的准确表示。在开始进行这个练习之前,首先必须装入一个采样的声音信号,这可键入

```
>> load splat
>> y=y(1:8192));
```

为了确认已准确无误地装入了这个声音数据,并证实这个 MATLAB 向量 y 能正确地代表一个声音信号,可键入

```
>> N=8192;
>> fs=8192;
>> sound (y, fs)
```

函数 fft 取出该已采样的表示 y,并在 ω 的样本点上计算近似的$y(t)$的 CTFT。若键入

```
>>Y=fftshift (fft(y));
```

那么,向量 Y 就包含了在区间 $-\pi f_s\leqslant\omega<\pi f_s$ 上 N 个等分频率点处 $Y(j\omega)$的近似值。事实上,Y 包含的仅是 $cY(j\omega)$的近似值,这里 c 是一个常数,但是不必担心这个近似,或这个加权系数,这仅是为本练习的需要而设定的。有关 $Y(j\omega)$和 Y 之间关系的更为全面的讨论,请参考练习 4.2。

函数 fftshift 将 fft 的输出重新排序,以使得 $Y(j\omega)$的样本在 Y 中的排列是从最负频率到最

① 在第 7 章将研究采样一个信号该有多快才能使该信号的采样能正确代表被采样的连续时间信号。

正的频率。现在，与 CTFT 有关的大多数性质都能在向量 Y 上得到证实。

基本题

(a) 键入 Y=fftshift(fft(y))，计算向量 Y 的傅里叶变换。键入

```
≫w=[-pi:2*pi/N:pi-pi/N]*fs;
```

将对应的频率值存入向量 w 中。利用 w 和 Y 在区间 $-\pi f_s \leq \omega < \pi f_s$ 内画出该连续时间傅里叶变换的幅值。

函数 ifft 是 fft 的逆运算。对于偶数长度的向量，fftshift 就是它本身的逆。对于向量 Y，$N=8\ 192$，这个逆傅里叶变换能用键入以下命令而求得

```
≫ y=ifft(fftshift(Y));
≫ y=real(y);
```

由于原时域信号已知是实的，所以这里用了函数 real。然而，在 fft 和 ifft 中的数值舍入误差都会在 y 中引入一个很小的非零虚部分量。一般来说，逆 CTFT 不必是一个实信号，而虚部可以包含有显著的能量。当已知所得信号一定是实信号(如一个声音信号)时，并且已经证实所除掉的虚部分量是没有意义的，real 函数才能用于 ifft 的输出上。

(b) 置 Y1=conj(Y)并将 Y1 的逆傅里叶变换存入 Y1 中，用 real(y1)以确保 y1 是实的，用 sound(y1, fs)将 y1 放出。已知 $Y^*(\mathrm{j}\omega)$的逆傅里叶变换是如何与 $y(t)$联系的，能解释刚才听到的是什么吗？

中等题

$y(t)$的 CTFT 可以用它的幅值和相位写成

$$Y(\mathrm{j}\omega) = |Y(\mathrm{j}\omega)| e^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$$

式中 $\phi(\omega)=\angle Y(\mathrm{j}\omega)$。对于许多信号，单独用相位或幅值都能构造出一个有用的信号 $y(t)$的近似。例如，考虑信号 $y_2(t)$和 $y_3(t)$，其 CTFT 为

$$Y_2(\mathrm{j}\omega) = |Y(\mathrm{j}\omega)| \text{ 和 } Y_3(\mathrm{j}\omega) = e^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$$

(c) 只要 $y(t)$是实信号，用解析方法说明 $y_2(t)$和 $y_3(t)$一定是实的。

(d) 构造一个向量 Y2 等于 Y 的幅值，并将 Y2 的逆傅里叶变换存入向量 y2 中，用 sound 放出这个向量。

(e) 构造一个向量 Y3，它有与 Y 相同的相位，但是幅值对每个频率都等于 1，将 Y3 的逆傅里叶变换存入 y3 中，用 sound 放出这个向量。

(f) 根据刚才听到的这两个信号，代表一个声音信号你认为傅里叶变换中的哪个部分是最关键的：幅值或相位？

深入题

这些习题要考虑时间轴的变换在 CTFT 上的效果，也就是说要考查变换 $y(at)$，$a>0$，是如何影响信号的傅里叶变换的。对于 $a>1$，$y(at)$对应于时间轴的压缩；而 $0<a<1$，则对应于时间轴的扩展。另外，将会看到如果 $y(t)$采样得足够密集，就能直接处理 y 而得到本该通过采样 $y(at)$，$a>1$，所得到的样本，不需要利用连续时间信号 $y(at)$来完成。对于 $0<a<1$，

也将看到能在离散时间内处理 y 以近似本应经由 $y(at)$而得到的样本。

若 $a>1$ 和 $y(t)$是定义在这个无限区间内 $t\in[-\infty,\infty]$的话，那么 $y(at)$被恰当地定义。然而，向量 y 所包含的 $y(t)$样本仅在区间 $0\leqslant t<N\Delta t$ 上，为了从 y 导出对应于 $y(at)$，$a>1$，样本的向量 ya，要作下面两个假设：(i) $y(t)$在区间 $0\leqslant t<N\Delta t$ 以外是零；(ii) a 是一个整数。第 2 个假设确保了每隔 a 个 y 的样本一定在 ya 中。

(g) 用向量 y 创建一个向量 y4，它包含有本该以 8 192Hz 从采样 $y_4(t)=y(2t)$ 所得到的样本。注意，以 8 192 Hz 对 $y_4(t)$采样就相当于用新的 Δt_2 为原 Δt 的两倍，即 $\Delta t_2=2/8\ 192$ 对 $y(t)$采样的结果。向量 y4 应有 N 个样本，其中后 $N/2$ 个样本全等于零。

(h) 用 sound(y4,fs)放出 y4。利用比较 y4 的傅里叶变换与 y 的傅里叶变换，能说明在高音上的变化吗？信号压缩是如何影响它的傅里叶变换的？

当 a 是比 1 大的整数时，就能直接从 y 中提取所要求的 $y(at)$的样本。当 $0<a<1$，就会出现另一个不同的问题，必须要在 y 的样本之间用新的值填充来内插样本。为了看出在内插这些值中的困难，考虑下面用 $a=1/2$ 的情况。设向量 y_5 中包含在区间 $0\leqslant t<N\Delta t$ 内，应该在 8 192 Hz 对 $y_5(t)=y(t/2)$采样所得到的样本值。注意，这些值就是本该以双倍采样率，即在 16 384 Hz 对 $y(t)$采样所得到的相同样本值。因为 y5 是 y 的两倍长，所以就必须在 y 的样本之间内插出 y5 的附加样本，具体来说，要用在练习 2.6 中讨论过的线性内插器。这就可以用来近似所要求的 $y_5(t)=y(t/2)$的样本。

(i) 创建向量 x，它由下式给出：

$$x(n)=\begin{cases}y(n/2), & n\ 为偶\\ 0, & n\ 为奇\end{cases}$$

注意，x 是一个长度为 2 * N 的向量。如果正在用的是 Student Edition of MATLAB，那么在向量 x 中的元素个数就超过了最大可容许的向量长度，这时在定义向量 x 之前，应该首先用 y=y(1:4096)替换 y。

(j) 利用在 2.2 节介绍的函数 filter 完成在 x 上的线性内插。这里要用到的线性内插器的单位冲激响应是 h=[1 2 1]/2。令 y5 是内插的结果。

(k) 用 sound(y5, fs)放出 y5。用比较 y5 和 y 的傅里叶变换，能解释在音调上的变化吗：记住，y5 的傅里叶变换含有在区间 $-\pi f_s\leqslant\omega<\pi f_s$ 内 $Y_5(\mathrm{j}\omega)$的 2 * N 个样本，需要类似于在(a)中所给出的那样定义一个新的频率向量，但有 $2N$ 个点。$y(t)$的扩展是如何影响它的傅里叶变换的？

4.4　系统的时域和频域特性

因为系统对任意输入 $x(t)$的响应 $y(t)$由卷积 $y(t)=h(t)*x(t)$给出，所以一个 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t)$完全表征了该系统。如果系统是稳定的，那么该系统的一个等效表示就由它的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$给出，这时连续时间傅里叶变换是由 $Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega)$关联的。这个练习要考虑几个由线性常系数微分方程描述的稳定 LTI 系统，对这些系统要求计算它们的单位冲激响应和频率响应。尽管用频率响应或单位冲激响应都足以完全表征一个 LTI 系统，但是将会明白有时既从时域，又从频域来考虑系统特性是很有利的。

基本题

这些习题都假定已完成 4.1 节有关 freqs 的用法。考虑由下面微分方程给出的一类因果 LTI 系统

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = a_0 x(t) \tag{4.11}$$

其中 $a_0>0$ 以保证稳定性。定义系统Ⅰ是满足(4.11)式，$a_0=3$ 的系统，系统Ⅱ是 $a_0=1/3$ 的系统。

(a) 用解析方法导出对应于(4.11)式的稳定 LTI 系统的频率响应，同时确定这个频率响应的幅值和相位。

(b) 定义 w=linspace(0, 10)，利用 freqs 计算系统Ⅰ和系统Ⅱ在 w 频率上的频率响应，在单一的图上画出这两个频率响应的幅值。这两个幅值图与解析表达式中频率响应的幅值一致吗？

(c) 用函数 impulse 计算系统Ⅰ和系统Ⅱ在向量 t=linspace(0, 5)所定义的时间样本点上的单位冲激响应。

(d) 单位冲激响应随时间衰减的速率与频率响应幅值随频率下降的速率之间是什么关系？CTFT 中的何种性质说明这一关系？

中等题

由在(b)中所画出的频率响应可见，由(4.11)式给出的 LTI 系统对高频分量要比低频分量衰减得多，这时系统Ⅰ和系统Ⅱ都是低通滤波器。在一些应用中，会要求在频率响应上有较尖锐的过渡带，也就是从要通过的频率到要衰减的频率有尖锐的过渡带。理想低通滤波器有最尖锐的过渡带，它定义为

$$H(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

其中 ω_c 是截止频率。理想低通滤波器的单位冲激响应

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

表明这个滤波器是非因果的。实时信号处理应用要求因果滤波器，因此不能用理想低通滤波器。然而，逼近该理想低通滤波器幅值响应的因果滤波器可以用线性常系数微分方程来实现。下面的习题将考虑一个这类滤波器的性质。

(e) 巴特沃兹滤波器① 就属于这样一类连续时间频率选择性滤波器，它们能用线性常系数微分方程实现。为了确定一个二阶 $\omega_c=3$ 的巴特沃兹滤波器的系数，键入

```
>> wc=3;
>> [b2, a2]=butter (2, wc, 's');
```

宗量's'表明所要求的是一个连续时间滤波器而不是离散时间滤波器；如若缺损，则由 butter 产生的是一个离散时间滤波器。向量 b2 和 a2 包含的是二阶微分方程的系数，其格式与

① 巴特沃兹滤波器在 Signals and Systems 的 9.7.5 节讨论过。有关其它各类滤波器和滤波理论的更详细讨论，请参考 Introduction to Filter Theory by D.E. Johnson, Prentice-Hall, 1976。

2.3 节所用相同。用 freqs 计算并画出相应 LTI 系统在 w = linspace (0,10)频率点上频率响应的幅值。在同一张图上要包括在(b)中已计算出的系统Ⅰ的频率响应的幅值。

(f) 利用频率响应幅值，哪个系统更逼近于 $\omega_c=3$ 的理想低通滤波器，是系统Ⅰ还是二阶巴特沃兹滤波器？将每一系统的频率响应相位与该理想低通滤波器的频率响应相位比较，情况怎样？

深入题

(g) 用 impulse 计算二阶巴特沃兹滤波器在时间样本 t = linspace(0, 5)上的单位冲激响应，在同一坐标上画出系统Ⅰ和二阶巴特沃兹滤波器的单位冲激响应。

(h) 在一些实际滤波系统中，还想有滤波器的输出在任何非负输入下是非负的输出，也即当 $x(t)\geqslant 0,\ -\infty<t<\infty$ 时，有 $y(t)\geqslant 0,\ -\infty<t<\infty$。利用在(g)中所画的单位冲激响应，论证是否每个系统的输出在输入是非负时(对全部 $-\infty<t<\infty$)能有非负值。如果系统输出能够是负的，给出一个输入的例子，并用 lsim 计算对应的输出。

4.5　用部分分式展开求微分方程的单位冲激响应

这个练习要学会如何求得输入输出满足线性常系统微分方程的稳定 LTI 系统单位冲激响应的解析表达式。这类系统的频率响应可以写成以(jω)的多项式之比。MATLAB 将这些多项式表示为以自变量 jω 降阶表示的多项式系数的向量。例如，多项式 $G(j\omega)=4(j\omega)^3-5(j\omega)^2+2(j\omega)-7$ 用 MATLAB 就表示为向量 G = [4　-5　2　-7]。对于处理这种格式的多项式，MATLAB 有几个函数，其中一种很有用的函数就是 residue，它计算出由多项式之比组成的函数的部分分式展开式。这个练习要学会将关联一个稳定连续时间 LTI 系统输入和输出的微分方程转换为代表出现在频率响应分子和分母中多项式的向量，然后用 residue 处理频率响应，以便单位冲激响应可以很容易地从部分分式展开中求得。

基本题

以下几个部分将用其输入输出由下列微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{2}y(t)=\frac{dx(t)}{dt}-2x(t) \tag{4.12}$$

描述的因果连续时间 LTI 系统进行操作。

(a) 求满足(4.12)式的因果 LTI 系统的频率响应 $H_1(j\omega)$。定义向量 b1 和 a1 表示以(jω)的分子和分母多项式。

(b) 只要由 b1 和 a1 所代表的多项式之比是一个真分式，那么命令 [r1, p1] = residue (b1, a1)将计算出 $H_1(j\omega)$的部分分式展开式。真分式就是分子多项式的阶严格小于分母多项式的阶。向量 r1 包含的是分子的部分分式项，而向量 p1 是分母多项式的根。如果分母多项式不包括任何重根，而系统函数又是一个真分式，那么由 residue 产生的向量就代表了下面的和式：

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{\mathrm{r1(m)}}{j\omega-\mathrm{p1(m)}}$$

其中 N 是向量 r1 和 p1 的长度。根据 residue 输出，写出 $H_1(\mathrm{j}\omega)$ 的部分分式展开式，并重新组合这些项以确认所给出的 $H_1(\mathrm{j}\omega)$。

(c) 系统单位冲激响应 $h_1(t)$ 就是频率响应 $H_1(\mathrm{j}\omega)$ 的逆 CTFT。部分分式展开式使得凭直观就能将每一项进行变换，再利用线性性质组合这些结果以求得单位冲激响应。写出该系统的单位冲激响应 $h_1(t)$。作为一种检验，想一想 CTFT 仅对绝对可积的连续时间信号存在，现在所得的 $h_1(t)$ 是绝对可积吗？

中等题

residue 函数也能够计算分母多项式具有一个重根时的频率响应部分分式展开。现考虑满足下面微分方程的因果 LTI 系统：

$$\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 7\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 16\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 12y(t) = 3\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 5x(t)$$

(d) 定义向量 b2 和 a2 代表该系统频率响应 $H_2(\mathrm{j}\omega)$ 的分子和分母多项式。

(e) 用 residue 得到向量 r2 和 p2。注意到 p2 的元素中有一个是重根，这表示分母多项式在那个值上有二阶的根。对应于在 p2 中重根值的 r2 的第 1 个元素是分母为这一项 $(\mathrm{j}\omega - p2(k))$ 的分子，这里 k 是 p2 第 1 个重根元素的序号。r2 的下一个元素 r2$(k+1)$ 是分母中 $(\mathrm{j}\omega - \mathrm{p2}(k+1))^2$ 这一项的分子。键入 help residue 可更详细地说明这一点。求 $H_2(\mathrm{j}\omega)$ 的部分分式展开，并重组和式中的各项以证实得到了相同的 $H_2(\mathrm{j}\omega)$。

(f) 用部分分式展开求单位冲激响应 $h_2(t)$。为了求得单位冲激响应，必须要求形式为

$$\frac{c}{(\mathrm{j}\omega - a)^2}$$

这样一项的逆 CTFT。单位冲激响应 $h_2(t)$ 是绝对可积的吗？

深入题

考虑输入输出满足下面微分方程的稳定连续时间系统：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} - 4y(t) = -4x(t)$$

(g) 定义向量 b3 和 a3 代表该系统函数 $H_3(\mathrm{j}\omega)$ 的分子和分母多项式。

(h) 用 residue 计算 $H_3(\mathrm{j}\omega)$ 的部分分式展开，重组和式中的各项以证实得到相同的 $H_3(\mathrm{j}\omega)$。

(i) 根据部分分式展开求系统的单位冲激响应 $h_3(t)$。记住，因为已假定系统是稳定的，所以 $h_3(t)$ 必须是绝对可积的。$h_3(t)$ 是因果的吗？

4.6 幅度调制和连续时间傅里叶变换

这个练习要研究莫尔斯码消息的幅度调制。一种简单的幅度调制系统可描述为

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) \tag{4.13}$$

式中 $m(t)$ 称为消息波形，f_0 是载波频率。余弦频率为 f_0 的连续时间傅里叶变换(CTFT)是

$$C(\mathrm{j}\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi f_0) + \pi\delta(\omega + 2\pi f_0) \tag{4.14}$$

将 $C(\mathrm{j}\omega)$ 代入(4.1)式可以确认这一点，它得到

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \tag{4.15}$$

用 $C(j\omega)$和 CTFT 的相乘性质,可以求得 $x(t)$的 CTFT 为

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}M(j(\omega - 2\pi f_0)) + \frac{1}{2}M(j(\omega + 2\pi f_0)) \tag{4.16}$$

其中 $M(j\omega)$是 $m(t)$的 CTFT。因为一个正弦的 CTFT 可以用频域中的冲激来表示,所以将信号 $m(t)$乘以余弦后就将 $M(j\omega)$搬移到载波频率的地方。

本练习的其余部分要涉及到信号

$$x(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_1 t) + m_2(t)\cos(2\pi f_2 t) + m_3(t)\sin(2\pi f_1 t) \tag{4.17}$$

以及能够从文件 ctftmod.mat 下载到 MATLAB 中的几个参数。这个文件在 Computer Explorations Toolbox 中,它可以从前言中所列地址的 MathWorks 公司得到。如果这个文件就是在你的 MATLABPATH 目录中的一个,键入 Load ctftmod.mat 就能下载所需要的数据。包括在 MATLABPATH 中的目录清单可用键入命令 path 列出。如果这个文件已经成功地装入,然后键入命令 who 应该得出下面结果;

```
≫ who
your variables are:
af      dash      f1      t
bf      dot       f2      x
```

除了信号 $x(t)$外,还已经装入:

- 一个频率响应能用 freqs(bf,af)画出的低通滤波器。
- 载波频率 f1 和 f2。
- 两个典型信号 dot 和 dash。
- 一串时间样本 t。

为了让这个练习更有趣味性,信号 $x(t)$含有一段简单的消息。当装入这个文件时,你应该注意到你已经变成了 Agent 008(特工 008)——破坏代码的侦探。老的 Agent 007 的最后一句话是"The future of technology lies in ..."("技术的未来在于……"),在这一点上 Agent 007 做了一张软盘就晕倒了。这张软盘含有 MATLAB 文件 ctftmod.mat。你的任务就是要将编在 $x(t)$中的代码译出来,并完成 Agent 007 的预测。

现在已经知道的是,信号 $x(t)$具有(4.17)式的形式,式中 f_1 和 f_2 分别由变量 f1 和 f2 给出。还知道信号 $m_1(t)$,$m_2(t)$和 $m_3(t)$中的每一个对应于字母表中的单个字母,这个字母表已用国际莫尔斯码进行编码,如下表所示:

A ·–	H ····	O –––	V ···–
B –···	I ··	P ·––·	W ·––
C –·–·	J ·–––	Q ––·–	X –··–
D –··	K –·–	R ·–·	Y –·––
E ·	L ·–··	S ···	Z ––··
F ··–·	M ––	T –	
G ––·	N –·	U ··–	

基本题

(a) 利用信号 dot 和 dash,以莫尔斯码组成对应于字母'Z'的信号,并对 t 画出这个信号。作为例子,字母 C 就是用键入 c=[dash dot dash dot]构成。将信号 $z(t)$存入向量 z 中。

(b) 用 freqs(bf, af)画出这个滤波器的频率响应。

(c) 信号 dot 和 dash 的每一个都是由低频分量组成的,以使得它们的傅里叶变换都大致位于这个低通滤波器的通常之内。用

```
≫ ydash=lsim(bf, af, dash, t(1:length(dash)));
≫ ydot=lsim(bf, af, dot, t(1:length(dot)));
```

对两个信号的每一个进行滤波能说明这一点。和原始信号 dash 和 dot 一起画出输出 ydash 和 ydot。

(d) 当信号 dash 被 $\cos(2\pi f_1 t)$调制时,傅里叶变换中的大部分能量都移到该滤波器的通带以外。用执行 y=dash * cos(2 * pi * f1 * t(1:length(dash)))创建信号 $y(t)$,画出 $y(t)$。同时也画出输出 yo=lsim(bf, af, y, t)。你得到了一个应该估计到的结果吗?

中等题

(e) 用解析法求下列每个信号的傅里叶变换(用 $m(t)$的傅里叶变换 $M(j\omega)$表示):

$$m(t)\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_1 t)$$

$$m(t)\cos(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_1 t)$$

和

$$m(t)\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$$

(f) 利用(e)中的结果,并检查在(b)中所画的滤波器的频率响应,设计一个从 $x(t)$中提取信号 $m_1(t)$的方案。画出信号 $m_1(t)$,并确定由该信号所代表的是哪个字母的莫尔斯码?

(g) 对信号 $m_2(t)$和 $m_3(t)$重复做(f)。请问 Agent 008,技术的未来在何处?

4.7 连续时间傅里叶变换的符号计算Ⓢ

这个练习要用 Symbolic Math Toolbox 对几个不同的信号求由(4.2)式给出的连续时间傅里叶变换(CTFT)。

基本题

(a) 定义符号表达式 x1 和 x2 代表下面连续时间信号:

$$x_1(t) = (1/2)e^{-2t}u(t)$$

$$x_2(t) = e^{-4t}u(t)$$

需要用函数 Heaviside 来表示单位阶跃函数 $u(t)$。

(b) 对于在(a)中所定义的 $x_1(t)$和 $x_2(t)$,用解析方法计算它们的 CTFT 在 $\omega=0$ 的值,即 $X(j\omega)|_{\omega=0}$(不应该先求 $X(j\omega)$来做这道题)。CTFT 在 $\omega=0$ 的值是怎样与时域信号相关联的?

(c) 由(a)所定义的信号中，哪一个在时域衰减得更快？根据这一点，你能预期在频域哪一个会衰减得更快？

(d) 用函数 fourier 计算 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的 CTFT。定义 X1 和 X2 是由 fourier 产生的符号表达式。用 ezplot 产生 $X_1(j\omega)$和 $X_2(j\omega)$的幅值图。这些图能对(b)和(c)中的答案进行确认吗？

中等题

(e) 定义符号表达式 y1 代表下面连续时间信号：

$$y_1(t)=\begin{cases}1, & -2\leqslant t\leqslant 2\\ 0, & \text{其余 } t\end{cases}$$

它可以作为两个 Heaviside 函数之差。

(f) 用解析方法求 $y_1(t)$的 CTFT，$Y_1(j\omega)$。

(g) 定义符号表达式 y2 表示信号 $y_2(t)=y_1(t-2)$。你能像对 y1 那样用两个 Heaviside 函数之差来完成，或者恰当地对 y1 应用 subs。

(h) 利用 fourier 求 y1 和 y2 的 CTFT，并将它们存入 Y1 和 Y2 中。倘若 Y1 不是你所期望得到的表达式，那么试试在所得表达式上用 simple 以便得出更为熟悉的形式。

(i) 用 ezplot 产生 $Y_1(j\omega)$和 $Y_2(j\omega)$的幅值图。比较这两张图情况如何？由这两个信号在时域之间的关系能预测到这个结果吗？

(j) 下面几部分要求信号 $v(t)=e^{-2|t|}$的 CTFT。将 $v(t)$写成 $v_1(t)$和 $v_2(t)$两个信号的和。将 $v_1(t)$选为因果信号，$v_2(t)$选为反因果信号，即 $v_2(t)=0,\ t>0$。用解析方法计算 $v(t)$的 CTFT，$V(j\omega)$。

(k) 对在(j)中所定义的两个信号定义符号表达式 v1 和 v2，然后用 symadd 或 symop 将它们合并成原信号 $v(t)$的符号表达式 v。

(l) 用 fourier 求 v 的 CTFT 的符号表达式 V。这个表达式是等效于在(j)中用解析方法求得的表达式吗？

深入题

(m) 定义 f 是信号 $f(t)=e^{-at}u(t)$的符号表达式，用 fourier 定义 F 是 f 的 CTFT 的符号表达式。注意，F 中含有一个未被求值的积分。这个未求值的积分对所有 a 值都收敛吗？

(n) 用 subs 设置 F1 中的 a 值等于 5，然后在这个置换的结果上应用 simple。所得结果是所期望的吗？

第 5 章

离散时间傅里叶变换

在第 3 章学习了对于分析和处理周期信号为什么连续时间傅里叶级数(CTFS)和离散时间傅里叶级数(DTFS)都是有用的工具。这些频域方法扩展到非周期连续时间信号变成为连续时间傅里叶变换(CTFT),这就是在第 4 章讨论的主题。本章的练习覆盖了离散时间傅里叶变换(DTFT),并且这些练习就是针对为实现初步的傅里叶分析而准备的。尽管 DTFS 仅能用来表示周期信号,但是 DTFT 却是一个完整的框架,借助于复指数信号 $e^{j\omega n}$,它既能对周期信号,又能对非周期信号进行表示,这就如同 CTFT 在借助于复指数信号 $e^{j\omega t}$之后,对表示连续时间信号是一个完整框架一样。一个离散时间信号 $x[n]$的 DTFT 由下式给出

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{5.1}$$

该式称作 DTFT 的分析公式。综合公式为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{5.2}$$

其中积分区间可以是任意 2π 长的区间。这一章要学会分别用 fft 和 ifft 的数值计算实现分析和综合公式。对于任何 DTFT 的数值实现来说都有两个主要的限制。一个是 $x[n]$必须为有限长,另一个是只能在连续频率变量 ω 的有限个样本点上计算出 $X(e^{j\omega})$。这些限制将在练习 5.1 中讨论。练习 5.2 要说明为什么 DTFT 对于分析实际应用中遇到的一些信号(譬如用按键电话传送的拨号音)也是一个有用的工具。DTFT 也能用于分析离散时间 LTI 系统。练习 5.3 要考查频率响应的幅值在所有频率上都等于 1 的系统,这就是所谓的全通系统。练习 5.4 和 5.5 要说明如何既能用 DTFT 来设计 LTI 系统,又能用它来辨识 LTI 系统。本章最后一个练习,即练习 5.6 要表明函数 residue 如何能用来计算频率响应为 $e^{-j\omega}$的有理多项式时的部分分式展开的,然后用这些展开式就能导得单位脉冲响应的解析表达式。

5.1 计算 DTFT 的样本

这个练习要考察用 MATLAB 计算离散时间傅里叶变换(DTFT)的问题。DTFT 和 CTFT 之间的一个基本差别是:DTFT 在频率上是周期的。这点从数学上可以用考察 DTFT 方程

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}(1)^n \end{aligned}$$

$$= X(e^{j\omega}).$$

予以证实。因为将 n 限制为整数，这就意味着复指数 $e^{j\omega n}$ 仅在 ω 的 2π 内才是不同的，所以 DTFT 是周期的，周期为 2π。虽然在任意 2π 的区间都可以，但通常都选 $-\pi\leqslant\omega<\pi$ 这样一个主值区间。

在用 MATLAB 计算一个信号的 DTFT 之前，有两个问题必须要提出来。首先，如果 $x[n]$ 是无限长信号的话，那么要将 $x[n]$ 截断到一个有限长信号，因为只有有限长信号才能用 MATLAB 的向量表示。另一个具有实际意义的问题是 $X(e^{j\omega})$ 定义在连续变量 ω 上的，而 $X(e^{j\omega})$ 仅能在一组频率的离散样本上求值。如果将频率样本选得足够多，那么这些频率样本上的图一定是真正 DTFT 的一个好的近似。为了计算高效，最好的一组频率样本应是在 $0\leqslant\omega<2\pi$ 区间内，由 $\omega_k=2\pi k/N, k=0, \cdots, N-1$ 给出的等分点上。对于一个仅在 $0\leqslant n\leqslant M-1$ 内为非零值的信号 $x[n]$，这些频率样本就对应于

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0,\cdots,N-1 \tag{5.3}$$

函数 fft 以一种计算上高效的方式实现(5.3)式。若 x 是包含在 $0\leqslant n\leqslant M-1$ 上 $x[n]$ 的向量，那么 X=fft(x, N)，$N\geqslant M$，就计算出 x 的 DTFT 在 N 个等分点上的样本值，并将这些样本值存入向量 X 中。如果 $N<M$，那么 MATLAB 函数 fft 就先将 x 截断为它的前 N 个序列值，然后才计算 DTFT，这样就得到了一个不正确的 DTFT 的样本值。在下面的一个习题中将会明白，应如何来计算小于 M 的频率样本上的值。

由于 DTFT 的周期性，对于 $k\geqslant N/2$ 的 X(k) 的值也就是在 $-\pi\leqslant\omega<0$ 区间上的 $X(e^{j\omega})$ 的样本。如果要想将由 fft 得到的 DTFT 样本重新排列成对应于 $-\pi\leqslant\omega_k<\pi$ 区间的话，MATLAB 函数 fftshift 就是专门用来将向量 X 的第 2 个一半与前面的一半进行交换而写的。

基本题

(a) 用解析方法计算矩形脉冲 $x[n]=u[n]-u[n-10]$ 的 DTFT，同时创建包含 $x[n]$ 非零样本的向量 x。

(b) 创建一个包含频率样本 w=2 * pi * k/N, k=[0: N-1]，$N=100$ 个频率点的向量。利用在(a)中求得的公式画出在这个范围上 $|X(e^{j\omega})|$ 的图，以及相位 $\angle X(e^{j\omega})$ 图。或许发现下面的函数是有帮助的：

```
function X=dtftsinc (M, w)
%   X=dtftsinc (M, w)
%   calculates the function, X=sin(Mw/2)/sin(w/2)
%   using selective indexing to avoid division by 0
den=sin(w/2);
num=sin(M * w/2);
X=zeros(size(w));
X(den~=0)=num(den~=0)./den(den~=0);
X(den==0)=M;
```

这个函数由 Computer Explorations Toolbox 提供，或者也能对它创建一个新的 M 文件。

(c) 对应于 DTFT 的主周期 $-\pi\leqslant\omega<\pi$ 重新安排频率样本，为此用 w=w-pi。用函数 fft 计算

$N=100$ 的 $x[n]$的 DTFT 样本,并将结果存入向量 X 中。画出 X 对 w 的幅值和相位。切勿忘记要用 fftshift 将在 X 中的 DTFT 重新排列以便与在 w 中的频率相匹配。这个图与(b)中的结果比较,情况如何?

(d) 利用 DTFT 的时移性质,用解析的方法计算 $x[n+5]$(中心对称的脉冲)的 DTFT。应该得到是纯实数的答案。再次用 DTFT 的时移性质,确定参数 a,以使得 Xr = exp(j * w * a). * X 相应于 $x[n+5]$的 DTFT。画出 Xr 对于 w 的图。可能必须要用函数 real 除掉结果中任何很小的虚部分量。还要用函数 dtftsinc 与 $x[n+5]$的 DTFT 的解析表示式一起验证所得结果。

(e) 用 fft 计算信号 $z[n]=(5-|n|)(u[n+5]-u[n-5])$的 DTFT。画出 $z[n]$的 DTFT 对于 w 的图。**提示**:$z[n]$的 DTFT 应是 ω 的纯实函数。

中等题

下面的习题要学会如何计算在 N 小于$x[n]$的长度时 $X(e^{j\omega})$的 N 个样本。函数fft(x,N)将向量 x 截断到 N 个样本,只要 length(x)>N。为了明了这是一个不正确的,为求得 x 的 DTFT 的 N 个样本的方法,现考虑 X=fft(x,1),这里仅要求 $X(e^{j\omega})$的一个频率样本$X(e^{j0})$,即 x 的直流分量 DC。检查一下 DTFT 的定义(5.1)式,这就是 $X(e^{j0})=\sum_{N=0}^{M-1}x[n]$;然而 fft(x, 1)只是产生 x 的第 1 个样本 x(1)。

(f) 已知只要 length(x)>N,函数 fft(x, N)就将向量 x 截取到 N 个样本,确定在调用 Y=fft(x, 2)之后,这里 x 是一个长度为 100 的任意向量,MATLAB 将产生什么。所得答案应该只涉及到向量 x 的头两个样本。为了确定这个表达式,可以试试 x=[1:100]和 x=[1 zeros(1, 99)]。

(g) 若仅要求 DTFT 的两个样本 $\omega_k=2\pi k/2$, $k=0, 1$,不用 fft 怎样用 MATLAB 来计算?对信号 x=[1:10 10:-1:1]计算这两个频率的样本。

(h) 这部分题假设 $N=M$。考虑 DTFT 的公式,对偶数 k 值在$\omega_k=2\pi k/N$ 点上求值。这个 $x[n]$的 DTFT 的 $N/2$ 个样本由下式给出:

$$X(e^{j\omega_k})=\sum_{n=0}^{M-1}x[n]e^{-j2\pi kn/(N/2)},\qquad k=0,\cdots,N/2-1 \tag{5.4}$$

利用 $x[n]$定义一个信号 $g[n]$,使得 DTFT 能够重新写成对定义的信号 $g[n]$在 $n=0,\cdots,M/2-1$ 上的和为

$$X(e^{j\omega_k})=\sum_{n=0}^{M/2-1}g[n]e^{-j2\pi kn/(N/2)},\qquad k=0,\cdots,N/2-1 \tag{5.5}$$

利用这个结果计算信号 $x[n]=(0.975)^n\cos(0.3n)(u[n]-u[n-200])$在 100 个等分频率点上的 DTFT。对于 w 画出该 DTFT 的幅值和相位。

深入题

现在不是要计算 $M/2$ 个样本,而可能是希望求任意 N 个$x[n]$DTFT 的样本,而 $N<M$ 和 M=length(x)。求这些频率样本点上的算法是根据如下观察:如果一个长度为 N 的序列 $\tilde{x}[n]$,能够找到它的 DTFT 就等于在所要求的频率样本点上的 $X(e^{j\omega})$,那么就能对 $\tilde{x}[n]$用 fft。

基本题

这些习题要对每个数字创建合适的拨号音,并检查它们的 DTFT 以确信这些信号具有正确的频率。还要定义一个向量,它包含了你的电话号码的拨号音。

(a) 创建行向量 d0 到 d9 以表示在 $0 \leqslant n \leqslant 999$ 区间的全部 10 个数字,利用 sound 听听每个信号。例如 sound(d2, 8192)应该听到在电话上按'2'时的声音。

(b) 函数 fft 能用来计算一个有限长信号在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 上 DTFT 的 N 个样本值。例如,X=fft(x, 2048)就计算出 $X(e^{j\omega})$在 $\omega_k = 2\pi k/2\,048, 0 \leqslant k \leqslant 2\,047$ 上的 2 048 个等分频率点的样本值。用 fft 计算在 $\omega_k = 2\pi k/2\,048$ 点上 $D_2(e^{j\omega})$和 $D_9(e^{j\omega})$的样本值。定义 omega 是包含对于 $0 \leqslant k \leqslant 2\,047$ 的 ω_k 的向量。画出这些信号的 DTFT 幅值,并确认峰值都落在图 5.1 所给出的频率上。在保持纵坐标为满程不变下而用 axis 将 ω 轴限制在 $0.5 \leqslant \omega \leqslant 1.25$ 的区间内,将会发现很容易就能看出哪些频率存在。对这两个数字产生适当标注的 DTFT 幅值图。

(c) 用 zeros 定义 space 是一个包含 100 个空号样本的行向量。利用补上适当的信号和 space 的方法,定义 phone 是你的电话号码。譬如,如果你的电话号码是 555-7319,就键入

```
>> phone=[d5 space d5 space d5 space d7 space d3 space d1 space d9];
```

注意,为了以这种方式补上这些信号,在(a)中所定义的全部数字和 space 都必须是行向量。用 sound 放出你的电话号码,并确信这就是你在按键式电话机上拨号时所听见的一样。

中等题

这些题要学会从拨号音中解出电话号码。要被解出的电话号码是在一个称为 touch.mat 的文件内,这个文件是在 Computer Explorations Toolbox 中,这个 Computer Explorations Toolbox 可以由列在前言中地址的 Math Works 公司得到。只要这个文件是在你的 MATLABPATH 中,键入 load touch 就能将数据装入 MATLAB 中。如果这个文件已正确装入,用键入

```
>> who
Your variables are:
hardx1    hardx2    x1    x2
```

应该列出变量名。

向量 x1 和 x2 包含代表两个不同电话号码的拨号音的采样序列。和在(c)中相同,这两个信号都由 1 000 个样本的 7 位数字所组成,每个数字之间由 100 个空号样本隔开。向量 hardx1 和 hardx2 是在(i)部分用的相同号码的欠精确地拨号形式。

(d) 用 fft 对 x1 的每个数字的 DTFT 计算 2 048 个等分样本。为了对每个数字单独分开用 fft,就需要依据这些数字和空号的相对长度将信号分成 7 个数字,或者将这个信号画出来,然后根据每个数字的起始来辨识出。将 fftshift 用于 fft 的输出,这就将 DTFT 的样本重新排列成对应于 $-\pi \leqslant \omega_k < \pi$ 内呈频率递增的顺序。定义 X11 到 X17 包含了对每个数字的 fft 输出应用 fftshift 所得到的这些 DTFT 样本。为了确定由 x1 所代表的电话号码,画出这些 DTFT 的幅值,并将这些信号的峰值频率与图 5.1 所示频率做比较。作为验证你的答案,这些数字的和应该是 41。

(e) 对信号 x2 重做(d),并将这个电话号码解出。这些数字的的和可不是 41。

深入题

这些题要写出一个函数自动由拨号音解出电话号码。为了帮助设计你的解码器,要看看图 5.1 每个可能频率上拨号音的能量。

(f) 用 fft 计算 $X(e^{j\omega})$的 2 048 个样本,指出哪个 ω_k 值和对应的序号 k 是最接近于拨号音频率中的哪一个。记住,MATLAB 向量是从序号 k = 1 开始的,所以 $\omega = 0$ 的 DTFT 是存在 X(1)中。

(g) $|X(e^{j\omega_k})|^2$ 的值给出了一个信号中在频率 ω_k 的能量。对由(a)中定义的 d8 用 fft,并用 fft 的输出对由(f)中确定出的每个 ω_k 计算 $|D_8(e^{j\omega_k})|^2$。对应于'8'的那些合适的 ω_k 值能量是最大吗?

(h) 写出一个函数 ttdecode,作为输入它接收到一个用(c)中的格式表示的拨号音信号(每个数字 1 000 个样本的拨号音,各数字间以 100 个空号样本隔开),其输出产生一个 7 个元素的向量,内含电话号码。例如,如果向量 phone 含有号码为 555-7319 的拨号音,就应该得到下面的输出

```
>> testout = ttdecode(phone);
>> testout
testout =
5  5  5  7  3  1  9
```

所写的实现这个函数的 M 文件的第 1 行应该读出

```
function digits = ttdecode(x)
```

你的函数应该用 fft 计算在 x 中每个数字的 2 048 个 DTFT 的样本,并检验在(f)中所给出的,相应于拨号音 ω_k 样本上的能量。将行频率和列频率上有最大能量的频率提取出来,然后用这些频率确定这个数是什么。用向量 x1 和 x2 作为输入测试你的函数,并验证它产生了在(d)和(e)中所得相同的电话号码。另外再用在(c)中所创建的代表你自己的电话号码测试你的函数。

(i) 在这个练习中都假设大多数人在拨打他们的电话时都很认真,每个数字都有相同的长度,每个数字之间的空隙也都一样长。现在将你的函数修改到在数字和空隙有变化的长度情况下的拨号音信号也能工作。为了稍许简化问题,假设全部拨号音和空号都至少有 100 个样本长。证明你的函数的新版本能在信号 hardx1 和 hardx2 下工作,这些信号包含有和 x1 和 x2 相同的拨号音,但是它们不是有规律地隔开的。

5.3　离散时间全通系统

这个练习要研究全通系统对离散时间信号的作用。全通系统定义为具有频率响应幅值等于 1 的系统,即 $|H(e^{j\omega})| = 1$。一个全通系统输出信号 DTFT 的幅值和输入信号 DTFT 的幅值是一样的。然而,如同在这个练习中要说明的,频率响应的相位能够导致在系统输出上显著的失真。

这个练习要用两个不同的离散时间全通系统来工作。这两个系统都是因果的 LTI 系统,

它们的输入和输出满足下面线性、常系数差分方程：

系统 1：$y[n] = x[n-3]$

系统 2：$y[n]-(3/4)y[n-1] = -(3/4)x[n]+x[n-1]$

基本题

(a) 对系统 1 定义系数向量 a1 和 b1，并用 freqz 产生该系统频率响应 $H_1(e^{j\omega})$的幅值和相位，并给予适当标注。倘若还不熟悉 freqz 的话，希望去复习一下 3.2 节。所得到的图能确认该系统是一个全通系统吗？

(b) 对系统 2 定义系数向量 a2 和 b2，并产生该系统频率响应幅值和相位的图。所得到的这张图应该表明对全部 ω 有$|H_2(e^{j\omega})|=1$。$H_2(e^{j\omega})$的相位和 $H_1(e^{j\omega})$的相位一样吗？当这两个系统的输入是相同时，可以预期输出是相同的吗？

中等题

(c) 定义 x 是信号 $x[n]=(3/4)^n u[n], 0\leqslant n\leqslant 50$，利用 stem 产生一张适当标注的 x 的图。

(d) 令 $y_1[n]$和 $y_2[n]$分别是系统 1 和系统 2 当输入是 $x[n]$时的输出。用 2.2 节讨论的函数 filter 计算包含 $y_1[n]$和 $y_2[n], 0\leqslant n\leqslant 50$，的向量 y1 和 y2。用 subplot 产生这两个输出的图。这两个输出一样吗？

(e) 用 fft 计算输入和两个输出的 DTFT $X(e^{j\omega})$，$Y_1(e^{j\omega})$和 $Y_2(e^{j\omega})$的 1 024 点的样本值，并将这些样本分别存在 X，Y1 和 Y2。画出这三个向量的幅值图，将它们进行比较情况怎样？你能预计到这一结果吗？

(f) 这两个系统输出中的哪一个看起来更像输入 $x[n]$？将一个信号 DTFT 的幅值保持不变能保证该信号在时域内不失真吗？

深入题

(g) 考虑将由(d)中计算出的系统 2 的输出用作另一个与系统 2 等效的系统的输入。定义 $y_{22}[n]$是对应的输出，也即 $y_{22}[n]$是两个系统 2 的系统级联后在输入是 $x[n]=(3/4)^n u[n]$时的输出。$|Y_{22}(e^{j\omega})|=|X(e^{j\omega})|$吗？一般来说，若将 M 个系统 2 级联，这个级联后的输出与输入还有相同的 DTFT 幅值吗？

(h) 现考虑将 2,3 和 4 个相同的系统 2 进行级联，定义 y22，y23 和 y24 表示用 filter 计算出的这些级联系统的输出。在同一坐标上画出 x，y2 以及刚才计算出的每一个输出。你怎样来描述每一附加全通的作用？

(i) 正如已经看到的，一个全通系统可以显著地改变一个信号在时域中的样子而不改变该信号在每个频率上的能量。要了解一个系统在信号中能量上的作用，以及在时域波形上的影响都是很重要的。以 $\sum_{n=0}^{50} x^2[n]$ 计算在 x 中的能量，并对 y2，y22，y23 和 y4 重复这一计算。将这些信号的能量比较后怎样，你能估计到吗？

5.4 频率采样：基于 DTFT 的滤波器设计

任何稳定的 LTI 滤波器的频率响应是由它的脉冲响应的 DTFT 给出的。因为 MATLAB

能用于计算有限长信号的 DTFT 的样本，所以 MATLAB 也能用来计算有限脉冲响应(FIR)滤波器频率响应的样本。这个练习要用 DTFT 从所期望的频率响应的样本来设计一个 FIR 滤波器。由于这个滤波器设计方法仅仅由一组频率样本点上的频率响应所确定，所以常称这一方法为"频率采样法"。

一个 FIR 滤波器的脉冲响应 $h[n]$ 仅在 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 区间内为非零的频率响应由下式给出：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\omega n} \tag{5.9}$$

练习 5.1 说明了如何用函数 fft 计算 N 个等分点上 DTFT 的样本。在这组习题中，要给出在这些 N 个频率点上 DTFT 的值，然后用算子 \ 来解所形成的一组线性方程。本题 FIR 滤波器是对一个截止频率 $\omega_c = \pi/2$ 的理想低通滤波器的近似，

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi \\ 0, & \pi/2 \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{5.10}$$

基本题

(a) 在 $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$ 范围内画出该期望频率响应的幅值。记住，DTFT 是周期的，周期为 2π。

(b) 构成一个对应于 $N=9$，从 0 到 2π 的等分点上的向量 w = 2 * pi * k/N，N = 9 和 k = [0:N-1]。将对应于向量 w 的频率点上期望频率响应幅值 $|H_{id}(e^{j\omega})|$ 存入向量 Hm 中。用 plot(w, Hm)画出期望频率响应幅度对 w 的图。你的图像一个低通滤波器吗？

(c) 现在频率响应的幅值已经给定，需要给定相位。如果 $h[n]$ 是关于 $n=0$ 对称的，频率响应 $H(e^{j\omega})$ 就能够是纯实数的，这时，$H(e^{j\omega})$ 就会有零相位。然而，如同在(5.9)式所假设的，你要计算的脉冲响应必须是因果的，所以就不可能是关于 $n=0$ 对称的。什么是这个因果滤波器 $h[n]$ 的相位？它与零相位滤波器的关系就是延迟 $(N-1)/2$ 个样本吗？将在 w 的频率样本点上这个相位的值存入向量 Hp 中。**提示**：对于频率样本 $|\omega| \leqslant \pi$，相位应该具有 $a\omega$ 的形式。用 $H(e^{j\omega})$ 的周期性确定在 $\omega > \pi$ 时，在 Hp 中相位的样本。

中等题

(d) 刚才创建的两个向量 Hm 和 Hp 包含了关于该 9 点脉冲响应 $h[n]$ 的 9 条信息。$h[n]$ 的 DTFT 的每一个样本都能用涉及 $h[n]$ 的一个线性方程的形式给予表述。对这 9 个未知量 $h[n]$，$n=0, \cdots, 8$ 同时解出这 9 个线性方程，就可恢复这个低通滤波器的脉冲响应。当以矩阵形式写出时，这些方程就是

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & e^{-j2\omega_0} & \cdots & e^{-j8\omega_0} \\ 1 & e^{-j\omega_1} & e^{-j2\omega_1} & \cdots & e^{-j8\omega_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-j\omega_8} & e^{-j2\omega_8} & \cdots & e^{-j8\omega_8} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[8] \end{bmatrix}}_{h} = \underbrace{\begin{bmatrix} H(e^{j\omega_0}) \\ H(e^{j\omega_1}) \\ \vdots \\ H(e^{j\omega_8}) \end{bmatrix}}_{H} \tag{5.11}$$

其中 $\omega_k = 2\pi k/9$。(5.11)式最左边的矩阵是知道的，它作为 DFT 矩阵，并能调用 A = exp(- j * 2 * pi * [0:8]' * [0:8]/9)创建出。用 Hm. * exp(j * Hp)存入列向量 H，即 H = Hm(:). * exp(j * Hp(:))创建期望频率响应向量。现在就能用算子 \ ，键入 h = A \ H解这

个联立线性方程组。用 stem 画出所得脉冲响应。尽管可能需要用 real 除掉由于舍入误差带来的 10e－16 数量级的虚部分量，但这个脉冲响应应该是实的。

(e) 用在同一张图上画出 $h[n]$的 DTFT 幅值和期望的 DTFT 样本的幅值，验证这个脉冲响应在给定的频率样本点上有所期望的 DTFT 幅值。为此，首先要创建一个向量 w2，它包含在 $0 \leqslant \omega < 2\pi$ 的频率区间上 1 000 个等分频率样本，然后利用 fft 计算在 h 中这些样本点上的 DTFT，并将结果存入向量 H2 中。现在利用 plot(w2, abs(H2), '－', w, Hm, 'o')在同一张图上画出 abs(H2)对 w2 和 H 对 w 的图。务必至少要有1 000个 DTFT 的样本，以便看出所给定的样本之间会发生什么。

5.5 系统辨识

在大量物理过程的建模中，线性时不变(LTI)系统一直是特别成功的。虽然一个 LTI 系统常常可以直接从物理定律中推导出来，但是在很多情况中模型必须要从物理观察中推演出。这样的观察可以包括对某已知输入 $x[n]$经测量得到的响应。如果输入是一个单位脉冲，那么响应 $y[n]$就是单位脉冲响应 $h[n]$，而 $h[n]$就完全确定了该 LTI 系统。对大多数应用来说，人们没有完全控制输入信号。这时，DTFT 的卷积性质就能用来对单位脉冲的响应进行求解；也即，若该系统输入和输出的 DTFT 可以计算出来，那么

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \tag{5.12}$$

就给出了频率响应，它就是单位脉冲响应 $h[n]$的 DTFT。在 MATLAB 中，一个有限长信号的 DTFT 可以用 fft 计算出在 $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$ 区间内等分频率点上的样本。这也就是说，如果 x 是包含在 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 区间上 $x[n]$的一个向量，那么 X＝fft(x)就是一个包含在 $\omega_k = 2\pi k/N$，$0 \leqslant k \leqslant N-1$，的 $X(e^{j\omega_k})$的向量。因为 $Y(e^{j\omega})$的样本能用类似的方式计算出来，所以 $H(e^{j\omega})$就能在这些频率样本上导得。然后，函数 ifft 就能用来计算出 $h[n]$。即，若 $h[n]$是一个有限长信号，并在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 以外是零，那么 ifft(H)就产生在这个区间内的 $h[n]$的值，这里 H 是一个含有在前面提到的 $H(e^{j\omega})$频率样本的向量。有关 fft 和 ifft 应用的更为深入的讨论可见练习 5.1。

基本题

假设一个特定的 LTI 系统对输入 $x[n]=(-3/4)^n$ 的响应是

$$y[n] = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

要求用 fft 和 ifft 确定这个系统的单位脉冲响应。

(a) 将在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 上 $x[n]$和 $y[n]$的值存入向量 x 和 y 中，这里 $N=64$。画出这两个信号，并确信在这个区间以外，它们基本上等于零，因此可以放心地截断。

(b) 用 fft 计算在区间 $0 \leqslant \omega < 2\pi$ 内 $N=64$ 的等分频率点上的 $X(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$。并在 $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$ 上画出 $|X(e^{j\omega})|$和 $|Y(e^{j\omega})|$对 ω 的图。

(c) 在相同的 64 个频率样本点上计算出 $H(e^{j\omega})$。用 ifft 计算在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 内的$h[n]$。

(d) 因为系统输入和输出的 DTFT 都是 $e^{-j\omega}$的多项式之比，所以也能用解析方法确定单位脉冲

响应。确定 $Y(e^{j\omega})$和 $X(e^{j\omega})$的解析表达式，然后用解析法确定 $Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$的逆 DTFT。用这个单位脉冲响应去验证在(c)中计算出的单位脉冲响应。

值得注意的是，在 MATLAB 中基本上有两种方法计算一个离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应。首先，若系统的频率响应可以表示成以 $e^{-j\omega}$的多项式之比，那么 residue 就能用于计算这个频率响应的部分分式展开，然后由这个部分分式展开式就能够导出单位脉冲响应，它可以有无限长。如果单位脉冲响应是有限长，那么 MATLAB 函数 ifft 就能用来从频率响应的样本计算出 $h[n]$。第二种方法的优点是不需要将频率响应表示为以 $e^{-j\omega}$的多项式之比。

中等题

现在考虑求一个 LTI 系统的单位脉冲响应，其输出是

$$y[n] = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{7}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] \tag{5.13}$$

这时的输入为　$x[n] = (1/2)^n u[n] - (1/2)^{n-1} u[n-1]$。

(e) 将在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 上 $x[n]$和 $y[n]$的值存入向量 x 和 y 中，这里 $N=64$。

(f) 用 fft 计算在 $\omega_k = 2\pi k/N,\ 0 \leqslant k \leqslant N-1$，的 $X(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$。画出$|X(e^{j\omega})|$和$|Y(e^{j\omega})|$对 ω 的图。

(g) 用在(f)中的结果和(5.12)式计算在 $\omega_k = 2\pi k/N, 0 \leqslant k \leqslant N-1$ 上的 $H(e^{j\omega})$，并将这些频率响应值存入向量 H 中，再用 ifft 计算在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 上的 $h[n]$，并将它存入向量 h1 中。

(h) 用计算卷积 y1 = conv(h1, x)验证存在 h1 中的单位脉冲响应是正确的。将 y1 与该已知系统响应在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 进行比较结果怎样？你能解释这个差异吗？**提示**：当 $X(e^{j\omega_k}) = 0$ 时，还有其它的方法能确定 $H(e^{j\omega_k})$的值吗？应当记住，由 fft 计算出的 DTFT 只有当 $x[n]$真正在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 之外为零时才等于 $X(e^{j\omega})$；因此，$X(e^{j\omega_k})$对于 $\omega = \omega_k$ 可能为零，但由 fft 计算的值却不为零(很小)，这是由于近似误差引起的。

为了克服由 $X(e^{j\omega})$的零值带来的问题，需要在频率响应 $X(e^{j\omega}) = 0$ 的频率附近的特性行为上做些假设。一种普遍的假设就是 $H(e^{j\omega})$是一种平滑变化的函数。

(i) 求 $X(e^{j\omega})$基本上是零的频率。“基本上是零”指的是用 fft 计算出的$|X(e^{j\omega})|$值是极端的小，并且很可能是近似误差的关系。创建一个新的向量 H2，它等于 H，然而对于$X(e^{j\omega})$基本为零的那些频率，置 H2 为零。

(j) 画出由 H2 给出的频率响应的幅值。值得注意的是，这个频率响应幅值随 ω 变化非常平滑，其中除开在(i)中将频率响应置零的那些点外。然而，按照 $H(e^{j\omega})$是一个平滑函数的假设，就可以将这些频率点上的频率响应 $H(e^{j\omega})$估计出来。在这个假设下，在 $X(e^{j\omega})$基本为零处的频率点上的 $H(e^{j\omega})$的值就可以根据在左右邻近频率上 $H(e^{j\omega})$的值内插出。

(k) 对 $X(e^{j\omega_0})$假设是零的任何频率 ω_0，由最靠近 ω_0 的两个频率 ω_k 的$H(e^{j\omega_k})$值，用线性内插所得置在 H2 中的 $H(e^{j\omega_0})$值。由于 $H(e^{j\omega})$是一个复值函数，所以线性内插应分别在 $H(e^{j\omega_0})$的实部和虚部分量中进行。画出 H2 中的幅值和相位。

(l) 用 ifft 由 H2 计算出在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 上的 $h[n]$值，并将这个单位脉冲响应存入向量 h2 中。用计算卷积 y2 = conv (h2, x)验证这个单位脉冲响应，并在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 上将这个输出与(5.13)式的 $y[n]$比较。有关 $H(e^{j\omega})$是平滑的假设改进了你的结果吗？

5.6 离散时间系统的部分分式展开

离散时间 LTI 系统往往用线性常系数差分方程来建模,这时其频率响应就是一个以 $e^{-j\omega}$ 的多项式之比。当这个多项式的比表示成部分分式展开式时,单位脉冲响应就能凭直观,或者由 DTFT 对的表中求得。如果一个满足线性常系数差分方程的 LTI 系统的输入的 DTFT 也是一个以 $e^{-j\omega}$ 的有理多项式,那么用部分分式展开就能计算该系统相应的输出。函数 residue 计算出部分分式展开式中的系数,尤其是当有理多项式的分母有高的阶次时,这个函数是特别有用的,因为高阶多项式没有计算机的帮助,因式分解是很困难的。在这个例子中,要用 residue 导出离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应,然后用 filter 验证你的结果。

函数[r, p, k] = residue(b,a)计算下列一个部分分式展开式的系数:

$$\frac{b_M z^M + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + \cdots + a_1 z + a_0} = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{(z - p_n)^{d_n}} + \sum_{m=0}^{M-N} k_m z^m$$

式中根 p_n 中可以有重根。除非有重根,否则指数 d_n 等于 1。如果根 p_n 重复 q 次,即 $p_n = p_{n+1} = \cdots = p_{n+q-1}$,那么 $d_{n+i} = 1 + i$, $i = 0, \cdots, q-1$。由 residue 产生的向量 k 包含了第 2 个和式的系数 k_m,若不是 $M \geqslant N$,则是一个空向量。值得提起的是,由于 residue 是对任意变量的多项式进行操作的,为方便不妨称该变量为 z,因此这个函数既能用在连续时间频率响应(这时 $z = j\omega$),也能用在离散时间频率响应(这时 $z = e^{-j\omega}$)上。在练习 4.5 中,residue 是用来计算连续时间频率响应 $H(j\omega)$ 的部分分式展开,而这个练习也要包括 residue 是如何处理重根 p_n 的。对于稳定的离散时间 LTI 系统,用 residue 计算的系数将对应于下面形式的部分分式展开:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{(e^{-j\omega} - p_n)^{d_n}} + \sum_{m=0}^{M-N} k_m e^{-jm\omega} \quad (5.14)$$

(5.14)式每一项的逆 DTFT 都能凭直观或由 DTFT 对的表上得到。

基本题

考虑输入和输出满足下列差分方程的离散时间 LTI 系统

$$6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

(a) 创建两个向量 a 和 b,它们包含了按 filter 所要求格式的该差分方程的系数。

(b) 用解析法求该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$。创建两个向量 num 和 den,它们包含该频率响应分子和分母多项式的系数。这些系数应该以 $e^{-j\omega}$ 的降幂次序按排,例如,向量[1 2 3]是多项式 $3 + 2e^{-j\omega} + e^{j2\omega}$ 的系数。注意,这个排列次序是与按 filter 要求的 a 和 b 的次序颠倒的。

(c) 用 residue(num, den) 确定频率响应的部分分式展开式,由该展开式确定单位脉冲响应的解析表达式。

(d) 用 filter (b, a, x)计算在区间 $0 \leqslant n \leqslant 10$ 内的该系统单位脉冲响应,这里 x 是在同一区间内的单位脉冲。用这个响应验证在(c)中求得的解析表达式。

中等题

考虑由图 5.2 所示系统。已知该系统的输入和输出满足下面差分方程:

第 6 章

信号与系统的时域和频域分析

这一章要研究信号与系统的时域和频域分析,并将迄今为止在本书中已建立的许多概念放在一起。虽然研究系统的时域或频域特性都是很有用的,但是同时理解这些性质是如何联系的会对信号和线性时不定系统产生更加完整的了解。本章要用到许多时域和频域分析方法,这些方法在前面各章中对离散时间和连续时间系统都已经学习过了。例如,在练习 6.1 中,作为既从频域,又从时域分析的一个例证,将学到描述一部汽车减震系统的二阶微分方程的系数是如何影响汽车悬置系统的行为的。这个练习对频域和时域分析将使用函数 freqs 和 lsim。也要研究在这两个域中系统特性行为之间的关系,如带宽和减震器的反应时间。在练习 6.2 中,将滤波器设计子程序 butter 和 remez 用于图象处理中时还将研究这些关系。练习 6.3 要说明,应如何在时域处理一个滤波器的单位脉冲响应以实现各种不同的频率响应。虽然很多滤波方面的练习都是针对频率响应的幅值对输入信号的作用效果着手的,而练习 6.4 则要说明一个离散时间滤波器相位响应是如何改变已录制语音的时间特性的。函数 unwrap 是用于帮助观察滤波器的连续相位响应的。练习 6.5 继续讨论相位响应在一个频分多址(FDMA)通信系统范畴内的窄带信号上的作用。在这个练习中,用离散时间滤波器的群时延在时间上分开一组具有窄带带宽的信号。这个练习讨论了用函数 grpdelay 计算出的一个滤波器的群时延和该滤波器对窄带信号时间响应之间的某些关系。本章最后一个练习 6.6 讨论到在预测股票市场方面的滤波器设计问题。与大多数滤波器设计问题的频域特性相反,在这个练习中,滤波器设计是完全用一种最小二乘预测问题的形式在时域给予表征的,这个最小二乘预测问题是用 MATLAB \ 算子来求解的。在时域和频域的建模误差之间的关系也将被研究。

6.1 一种二阶减震器

如下形式的二阶线性常系数微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n{}^2y(t)=\omega_n^2x(t) \tag{6.1}$$

可以对许多物理系统进行建模。*RLC* 电路和图 6.1 所示的减震系统这样的机械系统就是其中的两个例子,该减震系统是由一个弹簧和一个粘性减震器所组成。由于(6.1)式中的 ω_n 和 ζ 都直接与这些系统的重要特性有关,所以(6.1)式这种表示形式也是很有用的。为此,将会明白,把 ω_n 称为无阻尼自然频率和 ζ 称为阻尼比的原因。

对于图 6.1 所示的减震器系统,信号 $f(t)$是作用在质量 m 上的外部力,$y(t)$是从平衡点

处的水平偏移，在平衡点处该弹簧未施加任何恢复力。整个练习不计重力的影响。恢复力由下式给出

$$F_{\text{spring}} = -ky$$

而被减震器所施加的力由

$$F_{\text{dash}} = -v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

给出。参数 k 称弹性系数，v 是减震器粘度的度量。将作用到与减震器相连的质量上的力相加，并用 $f(t)=kx(t)$代替外部力，可得下列微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{v}{m}\right)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{k}{m}\right)y(t)=\left(\frac{k}{m}\right)x(t) \tag{6.2}$$

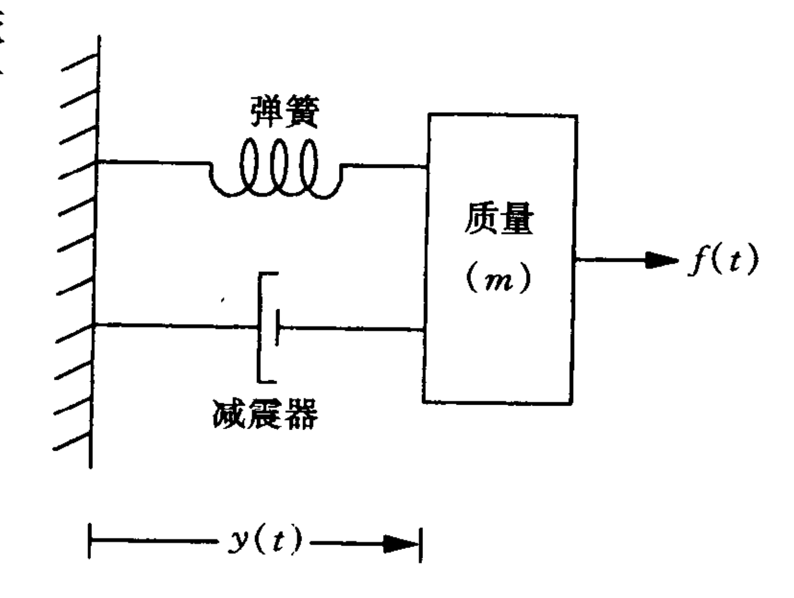


图 6.1　一种弹簧和减震器的系统

比较(6.1)式和(6.2)式后，可设置

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{和}\ \zeta=\frac{v}{2\sqrt{km}}$$

将会看到，这个减震系统作为一个低通滤波器作用在 $x(t)$(相当于外力)上，它对由于道路路面不平而引起的高频起伏进行阻尼，并可以提供一个较平稳的驾驶。然而，如果弹性系数和减震器的粘度选择得不仔细，减震系统可能会对路面的颠簸反应太慢，而导致车辆的失控。在这个练习中将对 k 和 v 的值(因此也就是 ω_n 和 ζ 的值)如何影响减震系统的性能会变为更加了解。由于减震系统通常都是针对某一具体的车辆质量而选定的，所以在本练习的其余部分都假设 $m=1$。这时，参数 ω_n 和 ζ 就完全由减震系统的系数 k 和 v 所确定。

基本题

(a) 用解析法求满足(6.2)式的 LTI 系统的频率响应。当 $\omega=0$ 时，$H(\mathrm{j}\omega)$值为多少？对于大的 ω 值，$\log_{10}|H(\mathrm{j}\omega)|/\log_{10}\omega$ 收敛到什么值？对于验证和分析你将要得到的图，作为 $|H(\mathrm{j}\omega)|$波特图的渐近线，这两个值都是要知道的，而且很有用。

在下面习题中，先将固定 $\zeta=1/2$，然后确定减震系统是如何随 ω_n 的值变化的。

(b) 对 $k=1$，确定频率响应分子和分母多项式的系数，并将这些系数值存入向量 b 和 a 中。用在 4.1 节介绍的函数 freqs 确定在向量 w = logspace(−2,2,100)包含的频率上的 $H(\mathrm{j}\omega)$，将 $H(\mathrm{j}\omega)$的这些样本存入矩阵 H1 中。注意，w 包含的是 $\log_{10}\omega$ 而不是 ω 的等分样本。做这种采样的理由是你将最终地画出 $\log_{10}|H(\mathrm{j}\omega)|$对 $\log_{10}\omega$ 的图。

(c) $k=0.09$ 和 $k=4$ 确定在 w 频率样本上的 $H(\mathrm{j}\omega)$，并将这些样本分别存入向量 H2 和 H3 中。

(d) 用 loglog 在同一坐标轴上画出 H1，H2 和 H3 对 w 的图。减震系统的截止频率可大致定在 $|H(\mathrm{j}\omega)|$的 log-log 图的“转折”处。对于比截止频率高的频率，频率响应的幅值随 ω 的增大面急剧下降。根据你的图，ω_n 大致等于每个减震系统的截止频率吗？图中的渐近值与在(a)中求出的值一致吗？

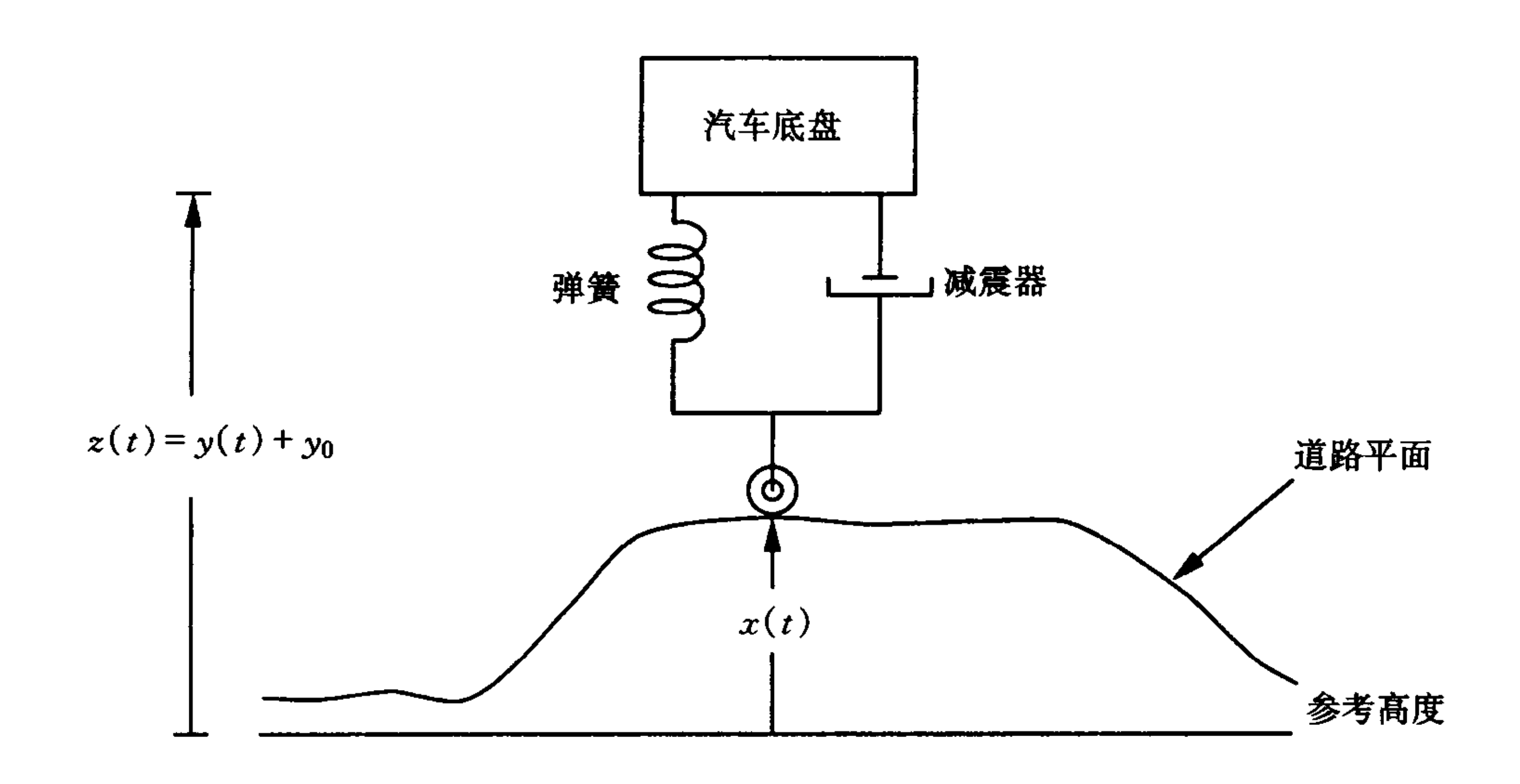


图 6.2　由弹簧和减震器组成的汽车悬置系统的模型

第一个限制确保汽车底盘不会撞到地面,第二个限制反映了任何减震系统在位移上的有限范围。对这个练习,假设 $y_1=0.5$。

(j) 对于这些题,需要装入文件 road.mat,这个文件是在 Computer Explorations Toolbox 中,它可以按前言中所列地址从 The Math Works 公司得到。如果 road.mat 已在你的 MATLABPATH 中,那么键入 load road 就应该将向量 x 和 t 装进你的工作空间。向量 x 含有在向量 t 的时间样本上一个"典型"路面的高度。信号 $x(t)$ 由以一种梯形状缓慢变化的地形,再加上由于路面的微小起伏所组成。确定一对 k 对 v 的值,使得(1)能将微小起伏的路面平滑掉;(2)要服从机械上的限制。利用函数 lsim 计算输出信号 $y(t)$。在同一对坐标轴上画出 $z(t)$ 和 $x(t)$。要注意,这个悬置系统满足(6.4)式的限制,对 k 和 v 的值存在一个范围。你可以对两对 k 和 v 的值画出 $z(t)$,然后对这两个系统的相对优点进行讨论。

(k) 尽管悬置系统通常都是针对某一特定的质量 m 设计的,但是车辆的质量会随乘客数量和载货量面变化。对于你已经选定的 k 和 v 值,在什么样的质量 m 的范围内,这个系统仍然遵守(6.4)式的限制?

6.2　用一维滤波器的图像处理

一个二维(2D)离散时间信号 $x[m,n]$ 有两个变量,而不是一个变量。一幅图像就是一个 2D 的离散时间信号,它仅在一个有限的区域内是非零的,也即 $N\times N$ 的方形区域 $0\leqslant m,n\leqslant N-1$。对于这样的图像,$m$ 相应于行变量,而 n 则相应于列变量。图 6.3 示出一个 32×32 个像素的图像(像素是一幅图像中一个样本的名字,'pixel'是'picture element'的缩写)。

许多用于设计和分析一维(1D)信号的时域和频域方法也能很好地用到 2D 信号上①。特别是,在过滤 2D 信号中普遍采用的方法是用两个 1D 滤波器的级联来处理信号,每一个滤波

① 对于二维信号与系统的进一步讨论,可见 Multidimensional Digital Signal Processing by Dudgeon and Mersereau, 1984,或 Two-Dimensional Signal and Image Processing by Lim, 1990。

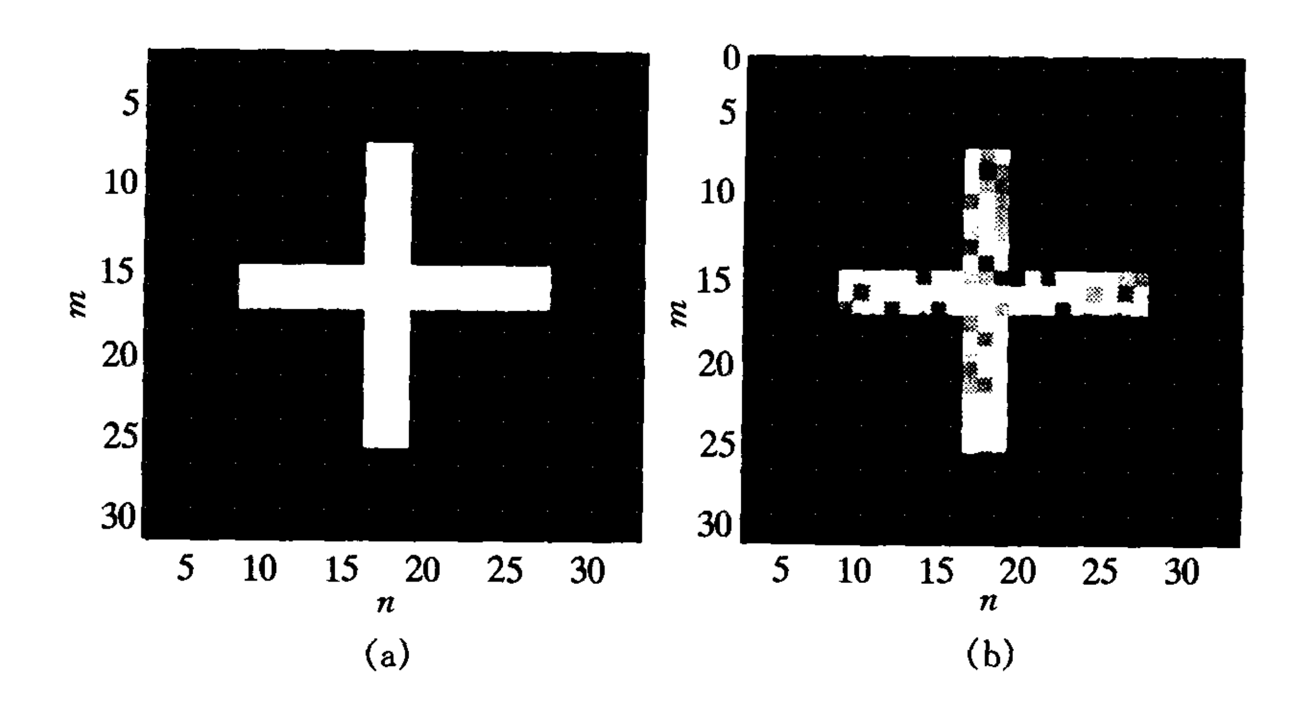


图 6.3 两幅 32×32 像素的图像：(a)加号"+"；(b)带有噪声的加号"+"

器用于一个方向。这两个 1D 滤波器的级联(称为可分开的 2D 滤波器)由以下两步给出：

(ⅰ)对每个 n 计算满足如下方程的 LTI 系统的输出 $z[m,n]$

$$\sum_{k=-K}^{K} a_k z[m-k,n] = \sum_{j=-K}^{K} b_j x[m-j,n] \tag{6.5}$$

(ⅱ)对每个 m 计算满足如下方程的 LTI 系统的输出 $y[m,n]$

$$\sum_{k=-K}^{K} c_k y[m,n-k] = \sum_{j=-K}^{K} d_j z[m,n-j] \tag{6.6}$$

输出 $y[m,n]$就是 $x[m,n]$经过滤后的结果。

值得注意的是，由系数 a_k 和 b_j 定义的列向滤波器和由系数 c_k 和 d_j 定义的行向滤波器都是非因果的。在图像处理的范畴内，因果性不是一个限制，因为在图像被处理之前，整个图像都已给出。

这个练习将用两个 1D 滤波器的级联对一幅图像进行低通滤波。为简单起见，这两个级联的 1D 滤波器都是一样的，即 $a_k=c_k, b_j=d_j$。将会看到，对 1D 信号所用的时域和频域方法能对 2D 滤波提供相当深入的了解。

这个练习需要装入数据文件 plus.mat，它是由 Computer Explorations Toolbox 提供的。如果这个文件已在你的 MATLABPATH 当中，只须键入 load plus 就能将数据装进。如果正确装入数据的话，你的工作空间内就包含有一个矩阵 x，它含有本练习要处理的图像，以及在矩阵 xn 内一个受到噪声污损的 x，这个受噪声污损的图像要在深入题中进行过滤。为了展示这幅图像，键入

```
≫ colormap(gray);
≫ image(64 * x);
```

这幅图像应该与图 6.3(a)一样。命令 colormap(gray)用于选择从 x 值映射到由 image 展现的色彩；同时由于彩色图有 64 个彩色等级，所以 image 的输入就乘以 64。

基本题

在这些习题中将创建 3 个 1D 滤波器，其中每一个都最终要用来对 x 中的图像进行低通滤

ter 计算由(6.8)式给出的对于 a=a1 和 b=b1 的该非因果滤波器的输出,假设输入由 x16 给出,对于 $0\leqslant m\leqslant 31$,而在其余地方为零。将在区间 $0\leqslant m\leqslant 31$ 上该滤波器的响应存入 y16 中。画出 x16 对 y16 的图。如果 y16 计算得正确,那么在 x16 中的不连续点就与在 y16 中"平滑过"的不连续点对齐。

(e) 对滤波器 2 和滤波器 3 确定这两个 1D 滤波器对列向量 x16 的响应。对每个滤波器在调用 filter 之前都必须对 x16 补零。再画出这两个响应对 x16 的图以确保不连续点对齐,而且在你的滤波器实现中没有任何延迟或超前。

(f) 写一个对函数 filt2d 的 M 文件,该函数非因果地对存在矩阵 x 中的 2D 图像进行滤波。你的 M 文件 filt2d.m 的第 1 行应该读出

function y=filt2d(b,a,d,x)

向量 a 和 b 含有该 1D 滤波的系数,而 d 包含一个与该滤波器的因果实现有关的"延迟"(注意,d 刚好就是 n/2,这里 n 是 1D 滤波器的阶)。M 文件应该主要由两步构成:(ⅰ)对 $N\times N$ 矩阵 x 的每一列滤波,并将结果存入一个 $N\times N$ 的矩阵 z 中,紧接着(ⅱ)对 z 的每一行滤波。注意,在滤波之前,都必须要对 x 的每一列和 z 的每一行补上适当个数的零。由 2dfilt 所产生的矩阵 y 应该和 x 有相同的维数。

(g) 利用 image 展示对这三种滤波器中的每一个由 filt2d 给出的经滤波后的图像(记住,对 image 的输入要乘以 64)。要确信图像没有延迟,也就是说,含在 y 中的已过滤的"+"号应该和 x 中的"+"具有相同的中心位置。

(h) 哪一个滤波器在原图像的形状上引入更多的失真?要密切注意在输入图像中存在的对称性上所受到的任何破坏,这种失真部分是由于滤波的非线性相位带来的。

深入题

现在要比较第二和第三个滤波器的输出。这两个滤波器都有有限长单位脉冲响应,但要求不同的系数个数。

(i) 将用第二和第三个 1D 滤波器由 filt2d 过滤 x 所产生的矩阵存入向量 y2 和 y3 中。

(j) 用 image 比较 y2 和 y3。哪个输出图像有更多的振荡?

你如何由这两个滤波器的阶跃响应来预期这些振荡?

在许多图像处理应用中,具有平滑过渡带的滤波器比那些具有尖锐过渡带而更加近似于一个理想低通滤波器的滤波器更乐于采用。说明一个较平滑过渡带的优点的一种应用是从图像中将噪声消除。

(k) 用 image(64 * xn)展示带有噪声的图像。你的图像应该与图 6.3(b)一样。

(l) 对有噪声输入 xn 时,确定对于第二和第三个滤波器 filt2d 的输出。用 image 展示这两个输出。对于消除噪声哪个滤波器做得更好?特别要密切注意在 x 是零的区域内的输出信号。你或许还想考察一下用 butter 和 remez 产生的改变滤波器的参数所出现的效果。

6.3 用变换法的滤波器设计

用于设计频率选择性滤波器的一种常用方法是由某一个原型低通滤波器开始,然后将那个滤波器的单位脉冲响应变换以得到一个具有所期望频率响应的滤波器。在这个练习中,将

要学会如何处理一个有限长单位脉冲响应(FIR)的低通滤波器而得到一个高通滤波器，一个带通滤波器，一个带阻滤波器，以及几个通带的多带通滤波器。你将要与之工作的原型低通滤波器是一个对截止频率为 $\pi/5$ 的理想低通滤波器的近似。这个理想滤波器的频率响应是

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/5 \\ 0, & \pi/5 \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{6.9}$$

频率响应的幅值近似于 $H_{id}(e^{j\omega})$ 的这个原型 FIR 滤波器的单位脉冲响应是在数据文件 protoh.mat 中，这个文件由 Computer Explorations Toolbox 提供。如果这个文件已经在你的 MATLABPATH 目录内。只须键入 load protoh 就能将它装进 MATLAB 中。在 MATLAB 工作空间内的变量 h 就是在这个练习中你将用的作为设计其他滤波器基础的该原型滤波器的单位脉冲响应。

基本题

(a) 对于具有单位脉冲响应 h 的这个滤波器，利用 freqz 计算在 ω 的 1 024 个等分样本频率上的频率响应，并将这些值存入向量 H 中，画出 H 的幅值，并确认它近似于所期望的频率响应幅值 $|H_{id}(e^{j\omega})|$。另外，用 stem 画出单位脉冲响应 h。用解析方法计算由(6.9)式给出的理想低通滤波器的单位脉冲响应。h 在形式上与理想低通滤波器的单位脉冲响应类似吗?

(b) DTFT 的调制性质可以用来由一个低通滤波器构成其他的滤波器。调制性质说的是，若 $X(e^{j\omega})$ 是 $x[n]$ 的 DTFT，那么 $e^{j\omega_0 n}x[n]$ 的 DTFT 就是 $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$。利用 h 和这个性质，设计一个具有实值单位脉冲响应 $h_1[n]$ 的高通滤波器，其频率响应的幅值近似于如下理想高通滤波器：

$$H_{hpf}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 4\pi/5 < |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases} \tag{6.10}$$

将这个新滤波器的单位脉冲响应存入向量 h1 中。对该高通滤波器的频率响应的幅值产生一个适当标注的图。同时用 stem 画出 h1。h 和 h1 是如何关联的?

(c) 利用 h 和调制性质设计一个带通滤波器，其频率响应近似于下列在 $-\pi$ 和 π 之间频率响应的理想带通滤波器：

$$H_{bpf}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 3\pi/10 \leq |\omega| \leq 7\pi/10 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases} \tag{6.11}$$

将这个带通滤波器的实值单位脉冲响应存入向量 h2 中。产生一张适当标注的，说明你的滤波器的频率响应的幅值近似于(6.11)式的理想带通滤波器的图。同时，利用 stem 画出 h2。h 和 h2 是如何关联的?

(d) 利用线性性质和调制性质由 h 设计一个带阻滤波器，其频率响应近似于下列在 $-\pi$ 和 π 之间频率响应的理想带阻滤波器：

$$H_{bsf}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 3\pi/10 \leq |\omega| \leq 7\pi/10 \\ 1, & \text{其余 } \omega \end{cases} \tag{6.12}$$

将这个带阻滤波器的实值单位脉冲响应存入向量 h3 中。产生一张适当标注的图，说明你的滤波器的频率响应的幅值近似于上面的理想带阻滤波器的图。

中等题

采样率扩展和压缩在改变一个低通滤波器的单位脉冲响应以得到其他的滤波器上也是有用的。以整数因子 L 的采样率扩展是定义为如下运算：

$$h_e[n]=\begin{cases}h[n/L], & n=kL\ \text{和}\ k\ \text{为整数}\\ 0, & \text{其余}\ n\end{cases} \tag{6.13}$$

而以整数因子 M 的采样率压缩是定义为

$$h_c[n]=h[Mn] \tag{6.14}$$

可以证明,扩展将频率响应按比例变为 $H_e(e^{j\omega})=H(e^{jL\omega})$。用图解的方法来说,频率响应在 ω 上压缩了一个因子 L,因此在 ω 上是周期为 $2\pi/L$ 的周期函数。计算单位脉冲响应的采样率压缩在频率响应上的影响一般来说要更复杂些。这个压缩了的滤波器的频率响应是

$$H_c(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H(e^{j(\omega/M-2\pi k/M)}) \tag{6.15}$$

从图上来说,这个方程把 $(1/M)H(e^{j\omega})$ 的复本放在以 $\omega=2\pi k/M$ 为中心上,然后将频率轴扩展 M 倍,以使得 $H_c(e^{j\omega})$ 仍是周期为 2π 的周期函数。如果原频率响应 $H(e^{j\omega})=0,\pi/M\leqslant|\omega|\leqslant\pi$,那么采样率压缩就能认为是将原 $H(e^{j\omega})$ 展宽 M 倍,并在幅值上乘以 $1/M$ 因子。当这个条件不满足时,$H(e^{j\omega})$ 的复本可能重叠并相互失真,这就是大家熟知的混叠现象。第 7 章将要更加详细地研究这个问题。

(e) 利用采样率压缩性质,由 h 设计一个新的低通滤波器,它近似于

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<2\pi/5\\ 0, & \text{其余}\ \omega\end{cases} \tag{6.16}$$

将这个新滤波器的实值单位脉冲响应存入向量 h4 中,并产生一张适当标注的对应 h4 的频率响应幅值的图,以确认它近似于期望的频率响应。

(f) 利用采样率扩展性质设计一个新的多通带的滤波器,它近似于下面在 $-\pi$ 和 π 之间的频率响应:

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/15\\ 1, & 9\pi/15<|\omega|<11\pi/15\\ 0, & \text{其余}\ \omega\end{cases} \tag{6.17}$$

将这个新滤波器的实值单位脉冲响应存入向量 h5 中,并产生一张适当标注的对应 h5 的频率响应幅值的图,以确认它近似于期望的频率响应。

深入题

将调制性质、采样率扩展性质和采样率压缩性质等进行组合能用来设计范围更广的各种滤波器。对于下列的每个理想滤波器,利用这些性质和 h 去求一个新滤波器的实值单位脉冲响应,而其频率响应则近似于所给的理想频率响应。产生一张与你所给出的单位脉冲响应对应的该滤波器频率响应的幅值图。

(g)

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi5\\ 2, & \pi/5\leq|\omega|\leq 3\pi/5\\ 0, & \text{其余}\ \omega\end{cases} \tag{6.18}$$

(h)

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi/15 \\ 1, & 8\pi/15 < |\omega| < 12\pi/15 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases} \tag{6.19}$$

6.4 低通滤波器的相位作用

滤波器设计往往都是为了满足频率响应幅值的指标要求。在这个练习中将会看到，在某些情况下相位的作用也很重要。将要用几个频率响应幅值大致相同的滤波器来处理清晰语音和带有噪声语音的效果，并比较不同滤波器输出的声音怎样。

这些习题要求用 3 个不同的低通滤波器，它们分别由存在文件 phdist.mat 中的系数向量所给定，而这个文件是在 Computer Explorations Toolbox 中。如果这个文件已经在你的 MATLABPATH 内，只须键入 load phdist 就装入了你的 MATLAB 中。如果这个文件已正确装入，那么键入 who 就应该得到

```
≫who
Your variables are:
a1          a3          b2          xnoise
a2          b1          b3
```

向量 a1～a3 和 b1～b3 包含了这 3 个离散时间滤波器的系数向量，它们都是按照 freqz 和 filter 所要求的格式存入的。向量 xnoise 含有一段附加某些高频噪声的语音信号。另外还要用键入 load orig 将原语音信号装入，这个未受污损的语音信号现在应该在向量 x 中。

基本题

(a) 用 freqz 计算这 3 个滤波器在区间 $0 \leqslant \omega < \pi$ 内的 1 024 个等分点上的频率响应，画出该 3 个滤波器频率响应的幅值。假定用同一语音信号作为这三个滤波器的输入，根据这些频率响应的幅值，哪两个输出信号你估计听起来更相象些？

(b) 对全部 3 个系统产生适当标注的频率响应相位的图。函数 angle 仅产生在 $-\pi$ 和 π 之间的相角。如果你刚画出了 angle 的输出，你可能发现图上的某些点很难理解，因为这个相位在每一次经过 π 或 $-\pi$ 时，从图的顶部到底部都经过“卷绕”。函数 unwrap 提取 angle 的输出，并将“卷绕”效果除掉而得到一个更为连续的相位函数。例如，如果 H 包含了在由 omega 标定的频率上频率响应的样本，那么 plot(omega/pi,unwrap(angle(H))) 就展示出非卷绕的相位。在相位响应上哪两个滤波器最相象？

(c) 定义向量 y1～y3 是利用 filter 当 3 个滤波器的输入是在 x 中的清晰语音时的输出，将每个语音信号用 sound 放出来。在每种情况下，这个语音信号仍然容易理解吗？基于对这个输入信号所得结果，你说是这些滤波器的幅值或是相位更加重要？

中等题

在这些习题中，要用这 3 个滤波器从一个受到污损的输入信号中除去高频噪声。这是一个简化的例子，说明这个 Dolby™噪声减小系统是如何工作的。大多数磁带走带系统在录制

时都会在信号上附加有高频噪声，Dolby 系统就是用来减小这一噪声的。

(d) 用 sound 将 x 和 xnoise 放出来听听这个清晰的和污损的语音信号之间的差别。

(e) 用 fft 计算 x 和 xnoise 在 ω 的 8 192 个等分频率样本上的 DTFT，并将这些值存入向量 X 和 Xn 中。画出每个信号的 DTFT 的幅值。在受污损信号的 DTFT 中你能见到这个高频噪声吗？

(f) 设 yn1～yn3 是用这 3 个滤波器分别过滤 xnoise 的结果，听听这 3 个输出信号，哪一个滤波器消除噪声最好？

(g) 用 fft 计算这些经过滤后的语音信号在 ω 的 8 192 个等分频率样本上的 DTFT，并将它们存入向量 Yn1～Yn3 中。对每个信号画出适当标注的 DTFT 幅值图。这些图显示出了你在(f)中所听到的差别吗？用于消除信号噪声的系统相位对这个语音的可理解性有影响吗？

6.5 频分多址

在几个用户之间共享一个信道的一种典型方法是通过使用频分多址或 FDMA。在一个典型的离散时间 FDMA 系统中，几个消息值 a_k 乘以一个窄带脉冲 $p[n]$，然后将这些脉冲的每一个调制到 $\cos(\omega_k n)$ 形式的不同频率的正弦载波信号上。如果这个脉冲是带限的，而且这些信号 $x_k[n]=a_k p[n]$ 中的每一个都被调制到不相连的频带上，那么这些消息值就能唯一地用带通滤波和解调将它们恢复出来。为了更精确些，定义这个复合的 FDMA 信号为

$$s[n]=\sum_{k=1}^{N}x_k[n]\cos(\omega_k n) \tag{6.20}$$

假设脉冲 $p[n]$ 有一带宽为 ω_x，即 $X_k(e^{j\omega})=0, |\omega|>\omega_x/2$。同时根据假设信号 $x_k[n]$ 中的每一个都被调制到不相连的频带内，即 $|\omega_k-\omega_{k+1}|>\omega_x$，那么每个 $x_k[n]$ 信号完全能够用频率选择性滤波的方法从信号 $s[n]$ 中恢复出来。

在这个练习中不用频率选择性滤波器来提取单一的 $x_k[n]$ 波形，而是要研究用全通滤波器的相位来提取 FDMA 信号。现在考虑一个单位脉冲响应为 $h[n]$ 的滤波器对这个窄带消息信号 $x_k[n]\cos(\omega_k n)$ 之一的响应。这个已调信号的傅里叶变换为

$$\frac{1}{2}X_k(e^{j(\omega-\omega_k)})+\frac{1}{2}X_k(e^{j(\omega+\omega_k)}) \tag{6.21}$$

它在 $\omega_k-\omega_x/2<|\omega|<\omega_k+\omega_x/2$ 这个小的频率范围之外为零。因此，这个滤波器对这个信号的作用就是把 $H(e^{j\omega})$ 的特性行为局限到 ω_k 的邻近。对于足够小的 ω_x，滤波器在 ω 靠近 ω_k 附近的相位响应就能够准确地用一个线性近似来建模，即

$$\angle H(e^{j\omega})\approx-\phi-\omega\alpha,\ \omega\text{ 接近 }\omega_k \tag{6.22}$$

对于这个近似，滤波器在窄带信号 $x_k[n]\cos(\omega_k n)$ 上的作用就由如下所组成：幅值上乘以 $|H(e^{j\omega_k})|$，一项总的复因子 $e^{-j\phi}$ 和一个相应于 α 个样本延迟的线性相位项 $e^{-j\omega\alpha}$。这个延迟称为在 $\omega=\omega_k$ 的群时延，因为它是以 ω_k 为中心的一群频率所经历的有效公共延时。每个频率的群时延是 $H(e^{j\omega})$ 的相位在那个频率处的负斜率，且能表示为①

① 更为精确地是群时延应以连续相位来定义，以避免在不连续点上求导数。

$$\tau(\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\{\angle H(e^{j\omega})\} \tag{6.23}$$

所以由(6.22)式可得 $\tau(\omega_k)=\alpha$。

为简单起见,假定有 3 个用户对应的离散时间频率为 $\omega_k = k\pi/4, k=1,2,3$。因此,接收到的信号是

$$s[n] = \sum_{k=1}^{3} a_k p[n]\cos(k\pi n/4) \tag{6.24}$$

另外还假设 $p[n]$是用 p=hamming(75)创建的 75 个样本宽的汉明(Hamming)窗。这个练习的目的是要用一个全通滤波器的群时延从发送的信号 $s[n]$中提取每一个信号 $x_k[n]$。具体地说,将用的全通系统满足

$$\begin{aligned} y[n] - 1.1172y[n-1] + 0.9841y[n-2] - 0.4022y[n-3] + 0.2247y[n-4] = \\ 0.2247x[n] - 0.4022x[n-1] + 0.9841x[n-2] - 1.1172x[n-3] + x[n-4] \end{aligned} \tag{6.25}$$

基本题

(a) 对这个全通滤波器创建向量 a 和 b。利用 H=freqz(b,a,N,'whole')对 N=1024 计算频率响应,并将它存入向量 H 中。画出这个频率响应,并验证这个系统确是一个全通。

(b) 函数[tau,w]=grpdelay(b,a,N,'whole')在向量 tau 中产生从 0 到 2π 内 N 个等分频率样本点上一个离散时间滤波器的群时延,这些频率样本是在 w 中产生,利用 grpdelay 计算由向量 a 和 b 所定义的滤波器的群时延。对频率画出这个群时延。

(c) 利用由 p=hamming(75)创建的脉冲,构成信号 $s_1[n]=p[n]\cos(\omega_1 n)$, $s_2[n]=p[n]\cos(\omega_2 n)$和 $s_3[n]=p[n]\cos(\omega_3 n)$,并将它们存入向量 s1,s2 和 s3 中,也即假设 $a_k=1$。对每个已调制脉冲补上 437 个零值,使这些信号的长度为 512 个样本长。用 fft 计算每个信号的 DTFT,并将它们存入向量 S1,S2 和 S3 中。在画该滤波器群时延的同一坐标上画出信号 s1,s2 和 s3 中的每一个 DTFT 的幅值。你需要用 fftshift 去对准频率轴。

(d) 根据从(c)中得到的图,在窄带信号 s1,s2 和 s3 所对应的每个频率范围上确定该滤波器的群时延。因为这个滤波器是一个全通滤波器,所以输出的 DTFT 幅值和输入一定是相同的。另外,因为信号 $x_k[n]\cos(\omega_k n)$是窄带的,所以在信号具有显著能量的频率范围内,滤波器的群时延近似为常数。这意味着只是这个窄带信号的包络线被滤波器所延时。如果每个 $x_k[n]\cos(\omega_k n)$信号都被这个滤波器所处理,那么这个包络的延时将会呈现出来,由此可以估计出所产生的延时。当 n_{d1}是一个整数时,你将预期到 $y1[n]$包络的延时将近似由 $s_1[n-n_{d1}]$给出,这里 n_{d1}是滤波器在 ω_1 的群时延,即 $\tau(\omega_1)=n_{d1}$。用 filter 计算并画出滤波器对每个信号 $s_k[n]$的响应,并将结果与你的估计作比较。

中等题

(e) 构成信号 s=s1+s2+s3,再次假设 $a_k=1$。因为每个脉冲 $x_k[n]$都是 75 个样本长,而这个滤波器的群时延对所有频率来说都明显小于 75,用这个滤波器将信号 s 处理以后不足以将这些单个的脉冲分开。然而,对这个信号反复应用这个滤波器,对每个脉冲所产生的有关群时延将会叠加;也就是说,对于第 l 次应用这个滤波器,响应的包络 $s^{(l)}[n]$将近似为

$$x_1[n-ln_{d1}]+x_2[n-ln_{d2}]+x_3[n-ln_{d3}] \tag{6.26}$$

式中 n_{dk}是在 ω_k 的群时延。确定在时间上要求分开脉冲 s1,s2 和 s3 的应用滤波器的适当次数 l,并验证这些脉冲确实按你所预计的分开了。画出 $s^{(l)}[n]$并在图上指出对每个 k 的 ln_{dk}。

深入题

(f) 除了在一个窄带脉冲的包络上引入一个延时外,这个滤波器的相位也要影响到载波信号 $\cos(\omega_k n)$的相位。当滤波器的相位近似为

$$\angle H(e^{j\omega})\mid_{\omega\approx\omega_k}\approx-\phi-\omega n_{dk},\quad \omega>0$$

时,用解析法证明该滤波器对一个窄带脉冲 $x_k[n]\cos(\omega_k n)$的响应将近似为 $x_k[n-n_{dk}]\cos(\omega_k n-\phi-\omega_k n_{dk})$。对每个 ω_k 频率,确定相应于每个频率上的相位滞后 ϕ 和群时延 n_{dk}。

(g) 对于 $k=1,2,3$,根据你在(f)中的答案构成信号 $\hat{y}_k[n]=x_k[n-n_{dk}]\cos(\omega_k n-\phi-\omega_k n_{dk})$,将每个信号 $\hat{y}_k[n]$和用 $s_k[n]$作为输入,由 filter 得到的滤波器的相应输出作比较。

6.6 股票市场的线性预测

在涉及语音编码、地震学和频率响应建模应用的时间序列分析中,线性预测是最为广泛应用的一种方法。在这个练习中,将要学到如何将线性预测应用于设计一个离散时间有限脉冲响应(FIR)滤波器来既解决时域预测问题,又解决频域建模问题。

在预测问题中,你观察到某一信号 $x[n]$,希望要设计一个系统,它能够单独地根据过去的值预测这个信号的将来值。对于线性预测来说,这个系统是一个 FIR 滤波器,它根据过去值的一种线性组合计算出一个预测量

$$\hat{x}[n]=-\sum_{k=1}^{p}a_k x[n-k] \tag{6.27}$$

式中 $\hat{x}[n]$就是 $x[n]$的预测值。因为用了信号先前的 p 个值构成这种预测,所以这是一个 p 阶预测器。给定某一固定的滤波器阶 p,线性预测问题就是要确定一组滤波器系数 a_k,以使得最好地实现(6.27)式的预测。确定这个"最好"系数 a_k 的最常用的准则是选择这些系数使得总的平方预测误差达到最小

$$E=\sum_{n=1}^{N}|e[n]|^2=\sum_{n=1}^{N}|x[n]-\hat{x}[n]|^2 \tag{6.28}$$

式中假设序列 $x[n]$长度为 N。

有几个途径可用来对 a_k 求解以使(6.28)式中 E 最小。或许最简单的就是用 MATLAB 的 \ 算子来解这个联立线性方程组。假设 $N>P$,这个线性预测问题可以形成矩阵形式为

$$-\underbrace{\begin{bmatrix} x[1] & \cdots & x[p] \\ x[2] & \cdots & x[p+1] \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x[N-p] & \cdots & x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}+\underbrace{\begin{bmatrix} e[p+1] \\ e[p+2] \\ \vdots \\ e[N] \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}}=\underbrace{\begin{bmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \tag{6.29}$$

或者紧凑一些写成 -Xa+e=x。这个方程能用来对向量 a 求解,以使总平方预测误差 e'*e 最小。在(6.29)式左边放一个减号的约定是为了让“预测误差滤波器”能表示成 e=Xa+x。

在这个练习中的习题要将线性预测器用到存在 djia.mat 文件中的金融数据上,这个文件在 Computer Explorations Toolbox 中。如果这个文件已经正确装入的话,那么键入 who 就应该产生

```
>>who
Your variables are:
djia
```

这里 djia 就是 Dow Jones Industrial Average(DJIA)(道·琼斯工业平均)指数每周的采样值,累计已近 94 年了。对于这些周数的 DJIA 示于图 6.4 上。

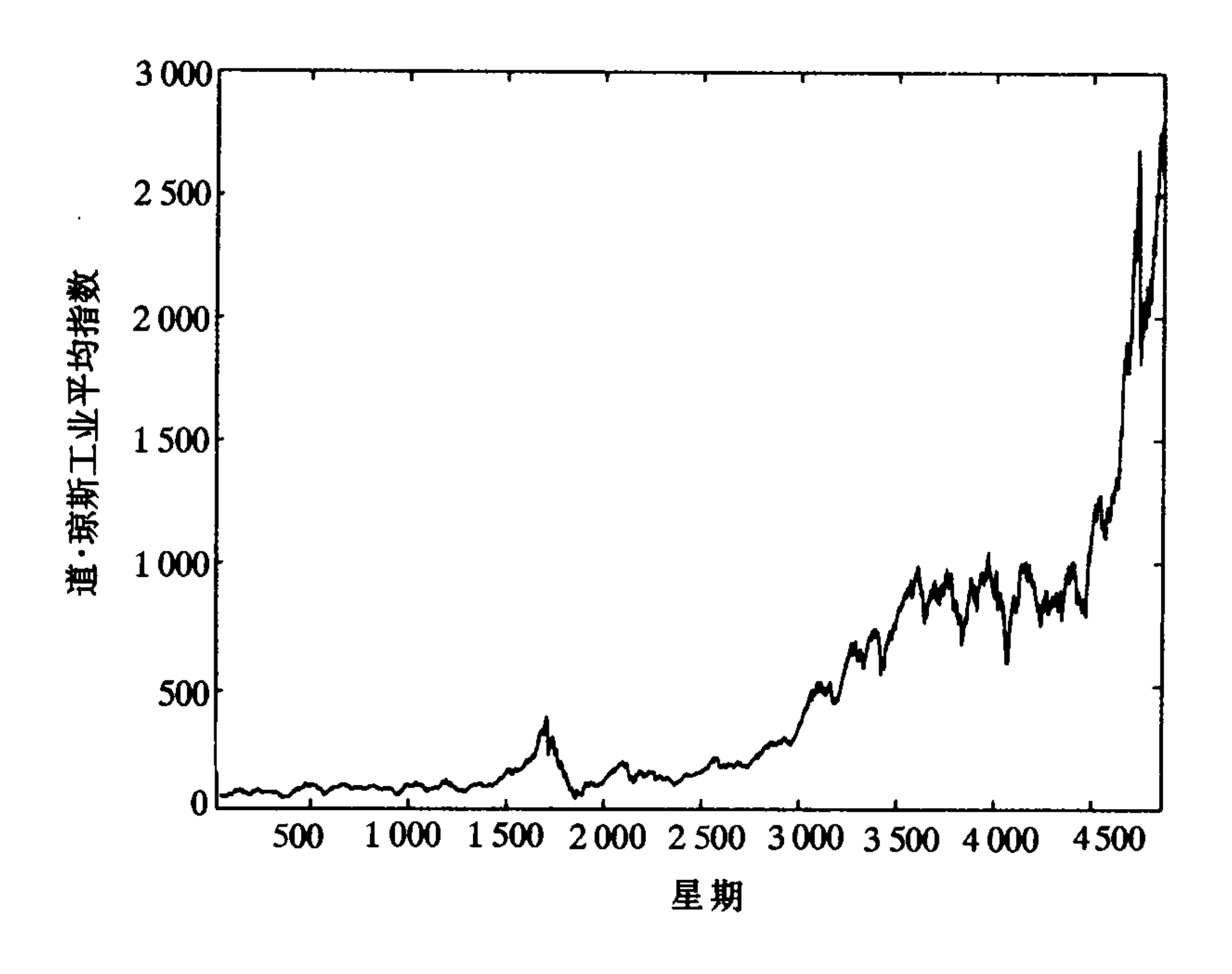


图 6.4 接近 5000 个周的道·琼斯工业平均指数

在这组习题中,你试图要用下列策略做一笔投资:

(i) 基于过去的 DJIA 数据构造一个线性预测器;

(ii) 用你的预测器,根据前 p 个星期的 DJIA 数据,对下个星期的 DJIA 值作一预测;

(iii) 如果 DJIA 增加到大于银行存款所得无风险利息,那么就将你的全部钱投资到 DJIA;

(iv) 如果 DJIA 增加到小于银行存款所得利息,那么就将你的全部钱存入银行。

你将假设,如果你决定把你的全部钱在这个星期投到 DJIA,那么你就完全挣得在 DJIA 被赚到的收益。例如,如果在第 n 个星期你有 \$1000 在 DJIA,而在第($n+1$)个星期的 DJIA 由 djia(n+1)给出,那么在第($n+1$)个星期的周末,你就有 \$1000 * djia(n+1)/djia(n)。还要假设,银行存款的年利率总是 r=3%,按周计复利,例如,在银行你的 \$1000 在一星期之后将值 \$1000 * (1+0.03/52)。

基本题

(a) 在线性和半对数坐标上各画出 DJIA 数据。假定你由 $ 1000 起始,并将全部投到 DJIA,在投资期结束(4 861 周)你会有多少钱? 如果你将全部钱都存入银行,年利率(APR)为 3%,按周计复利,你需要什么样的利率才能达到同样的业绩? 如果 $r=0.03$ 是年利率(APR),那么根据按周计复利算,在 N 周后银行存款余额应等于初始余额的 $g=(1+r/52)^N$ 倍。

(b) 假设 $p=3$,由第 1 个 10 年的数据(即用 $N=520$ 周)创建在(6.29)式中向量 x 和矩阵 X。可用 MATLAB 的 \ 算子对向量 a 求解,以使得在(6.29)式中的内积 e' * e 最小。按 a= -X \ x 利用 MATLAB 的 \ 算子解出这个线性预测器的系数。

(c) 利用 xhat1 = -X * a 对第 1 个 10 年的数据创建预测值的向量。同时在序列 djia 上适当地用 filter 也创建向量 xhat2。要注意,在向量 a 中的系数与按 filter 所要求的次序是相反的。在实际的周平均指数图上画出预测值的图,确定预测值和实际值之间总平方误差。作为验证,分别用两种方法来做。首先用 e = x + X * a 计算预测误差,然后用实际值减去预测序列 xhat2 来计算误差。确信这两个值是相同的。

(d) 计算并画出总平方预测误差作为 p 的函数,$p=1,\cdots,10$。对于每个模型的阶 p,必须要求出预测器系数 a1,…,a10,然后再计算每个预测误差。什么是一个合适的 p 值? 也就是说,有一个 p 值,在比这个 p 值再大,预测误差基本上不再减小了,这个 p 值是什么?

中等题

(e) 根据第 1 个 10 年的数据你设计了这个预测器,并由(d)也选定了模型的阶,现在要测试在前面所提出的投资策略。在第 p 个星期末给出你的 $ 1000,并根据你的预测器输出做了 520 次的交易判断。首先,确定你能够挣得的钱的上限;这就是说如果你是一个无所不知的天才,你知道每个星期股票市场的走向,而且总是投资在银行或者 DJIA 上更好的地方,你能够赚多少。现在,作为一个下限,如果你把全部钱都放在银行,每周得益 $(1+0.03/52)$,计算一下你会得多少钱。作为另一个下限,每周都将全部钱放在 DJIA,并采用"买进并持有"("buy-and-hold")的策略,确定一下会得多少钱。最后,用你的预测器计算一下会得多少钱。银行该付什么样的等效年利率(APR)才能达到按你的预测器所得相同效益?

(f) 现在按最近 10 年的数据,也即最后 520 周的 DJIA,利用你的预测策略,计算一下你怎样做和每一种底限是怎样进行:最好的可能,全部放在银行和全部以"买进并持有"放在 DJIA。同时也计算和你的预测器等效的 APR。

深入题

(g) 计算在全部数据上的最大可能获利。也就是,如果你已知道每星期 DJIA 的走向,并有了在银行作 $(1+0.03/52)$ 的选择,或者每周在 DJIA 的得益,在全部 4 861 个星期上你能得多少钱? 现在可能促使你要去寻求另一种预测策略,它比在前面所建立的简单线性预测方案更能接近这个最大的获利。譬如说,你可能试图在作出每一步预测前,根据最近 10 年的数据更新你的预测器系数。对于真正这样来做,有几种快速算法,像递推最小二乘

(RLS)算法[①] 就是其中之一。

(h) 用解析方法论证(用帕斯瓦尔定理),将线性预测器的系数 a_k 按照使

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{\hat{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}\right|^2\mathrm{d}\omega \tag{6.30}$$

最小来选取,证明可用线性预测器对序列 $x[n]$的 DTFT 建模,式中

$$\hat{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}}$$

在同一坐标轴上画出 DJIA 序列的 DTFT 和线性预测器的频率响应。因为这不是一个差式,而是一个比,因此要让这个比值最小,你应该看到 $\hat{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$要有合理的形状,但是差一个比例因子 G。将 $\hat{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$乘以 $G=\sum e^2[n]$,再重画这两个 DTFT。你能领会到为什么要选这个 G 值吗?

① 有关 RLS,请见 Adaptive Filter Theory, by S. Haykin。

第 7 章

采样

采样定理给定了一些条件,在这些条件之下,一个带限的连续时间信号能够完全用它的离散样本表示。所得到的离散时间信号 $x[n]=x_c(nT)$包含了在连续时间信号中的全部信息,只要这个连续时间信号是充分在频率上带限的,即 $X_c(j\Omega)=0,|\Omega|\geqslant\pi/T$。当满足这一条件时,原连续时间信号完全能够用样本 $x[n]$之间的内插予以重建。如果 $x[n]$满足采样定理,就有可能完全在离散时间域中处理 $x[n]$而得到另一个序列,这个序列本该以不同的采样率对 $x_c(t)$采样而得到。这个处理称为采样率转换。离散时间系统的灵活性对于连续时间 LTI 系统的实现提供了一种强有力的手段,这就是所谓的连续时间信号的离散时间处理。在这一技术中,一个带限的连续时间输入信号被采样,用一个离散时间系统处理所得到的样本,然后将这个离散时间系统的输出样本进行内插,给出连续时间输出信号,整个系统如图 7.1 所示。

本章练习要研究涉及信号采样和重建中的许多问题。练习 7.1 考查被适当带限的连续时间信号的重要性,而练习 7.2 则比较两个对理想内插滤波器的实际近似。练习 7.3 用在8 192 Hz 采样的语音信号来说明如何实现采样率的转换。在练习 7.4 将会看到,一类称之为带通的信号能在低于采样定理的采样率下对它采样,并仍然能够完全重建。练习 7.5 和 7.6 研究半采样间隔延时和离散时间微分器系统,这两者都能够在连续时间信号的离散时间处理范畴内进行分析。

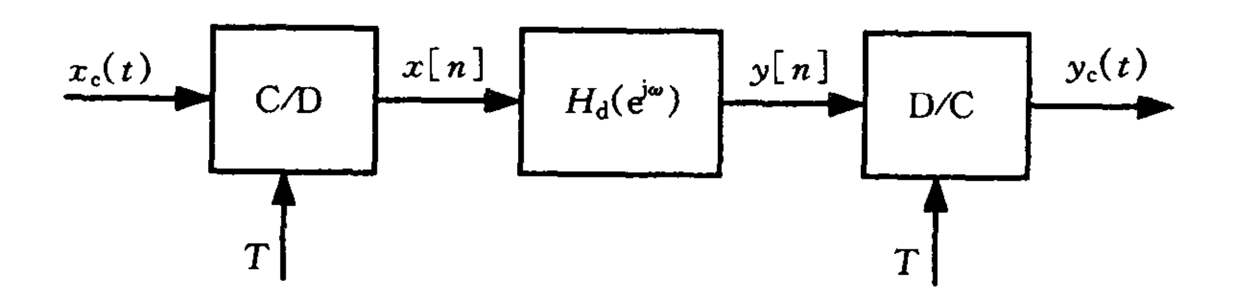


图 7.1 连续时间信号的离散时间处理

请注意,整个这一章都用 Ω 代表连续时间频率变量,而用 ω 代表离散时间频率变量。这个约定可以减小在练习中涉及两个时间域所带来的混淆。

7.1 由欠采样引起的混叠

这个练习包括由于欠采样而在用带限内插重建信号上引起的混叠效果。如果一个连续时间信号 $x(t)$每隔 T 秒采样一次,那么信号的样本就形成了离散时间序列 $x[n]=x(nT)$。奈奎斯特采样定理说的是,如果 $x(t)$的带宽小于 $\Omega_s/2=\pi/T$,即 $X(j\Omega)=0,|\Omega|>\Omega_s/2$,那么

$x(t)$就完全可以由它的样本 $x(nT)$给予重建。带限内插或信号重建是最容易将 $x(t)$首先乘以冲激串后而看出来的

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

用一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器对 $x_p(t)$滤波，就能从 $x_p(t)$中将 $x(t)$恢复出来。定义 $x_r(t)$为低通过滤 $x_p(t)$而得到的重建信号。若 $x(t)$的带宽大于 $\Omega_s/2$，那么样本$x(nT)$就不能完全确定 $x(t)$，$x_r(t)$一般来说不等于 $x(t)$。下面的习题要考查对一个纯正弦和一个鸟声信号欠采样的效果。

基本题

考虑正弦信号

$$x(t) = \sin(\Omega_0 t)$$

若 $x(t)$用频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ rad/s 采样，那么离散时间信号 $x[n] = x(nT)$就等于

$$x[n] = \sin(\Omega_0 nT)$$

假定采样频率固定在 $\Omega_s = 2\pi(8\ 192)$rad/s。

(a) 假设 $\Omega_0 = 2\pi(1\ 000)$rad/s 并定义 T=1/8 192。创建向量 n=[0:8191]，使得 t=n*T 包含了区间 $0 \leqslant t < 1$ 内 8 192 个时间样本。创建向量 x，它包含在 t 的时间样本上$x(t)$的样本。

(b) 用 stem 对 n 展示前 50 个 $x[n]$样本，用 plot 对采样时间展示 $x(t)$的前 50 个样本(用 subplot 同时展示这两个图)。

注意，plot(t,x)展示出的是在 x 中给出的样本，再在样本值之间用直线内插而成的一个连续时间信号。虽然这种内插一般不等于根据采样定理的带限重建，但是常常可以认为是一个很好的近似。

为了计算带限重建信号 $x_r(t)$的连续时间傅里叶变换的样本，今用下列函数

```
function [X,w]=ctfts(x,T)
% CTFTS calculates the continuous-time Fourier transform (CTFT) of a
% periodic signal x(t) which is reconstructed from the samples in the
% vector x using ideal bandlimited interpolation. The vector x
% contains samples of x(t) over an integer number of periods, and T
% contains the sampling period.
%
% The vector X contains the area of the impulses at the frequency
% values stored in the vector w.
%
% This function makes use of the relationship between the CTFT
% of x(t) and the DTFT of its samples x[n], as well as the
% relationship between the DTFT of the samples x[n] and the DTFS of x[n].
N=length(x);
X=fftshift(fft(x,N))*(2*pi/N);
```

7.2 由样本重建信号

这个练习包含信号 $x(t)$从它的样本 $x(nT)$的重建,这里 T 是采样周期,n 是任意整数。正如在练习 7.1 中所讨论的,如果 $x(t)$的带宽小于 $\Omega_s/2=\pi/T$,那么 $x(t)$就能用低通过滤 $x(t)$的冲激串采样 $x_p(t)$完全恢复

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

由 $x_p(t)$重建 $x(t)$所用的低通滤波器是

$$H(\mathrm{j}\Omega)=\begin{cases}T, & |\Omega|<\Omega_s/2\\ 0, & \text{其余 }\Omega\end{cases}$$

它是一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器。这个滤波器的单位冲激响应为

$$h_{\mathrm{bl}}(t)=\frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} \tag{7.2}$$

然后带限重建由下式给出:

$$x_{\mathrm{bl}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h_{\mathrm{bl}}(t-nT)$$

这个信号是否是 $x(t)$的一个“好”的重建取决于 $x(t)$的带宽。正如在练习 7.1 所指出的,如果 $x(t)$的带宽是大于 $\Omega_s/2$,那么这个重建的信号 $x_{\mathrm{bl}}(t)$一般不等于 $x(t)$。

如果 $x(t)$的带宽超过 $\Omega_s/2$,仍然有可能从它的样本 $x(nT)$恢复 $x(t)$,如果还有关于 $x(t)$的另外一些信息的话。譬如,若已知 $x(t)$是分段线性的,那么就可以用一个线性内插器重建 $x(t)$。样本 $x(nT)$的线性内插器由 $x_p(t)$与下面单位冲激响应卷积给出:

$$h_{\mathrm{lin}}(t)=\begin{cases}1-|t|/T, & |t|\leq T\\ 0, & \text{其余 }t\end{cases} \tag{7.3}$$

连续时间重建信号 $x_{\mathrm{lin}}(t)=x_p(t)*h_{\mathrm{lin}}(t)$等效于用直线将这些样本连起来。然而,就如同在采样率低于奈奎斯特率时,带限内插在恢复一个信号上没有做得很好一样,如果原信号 $x(t)$不是分段线性的,线性内插器也不可能产生一个很好的重建。如同下面的习题要说明的,任何内插滤波器的性能都取决于原信号 $x(t)$的特征。

在下面习题中,既用带限内插,又用线性内插从采样时刻 $t=nT$, $T=1/2$ 得到的样本来重建下列信号:

$$x_1(t)=\cos\left(\frac{8\pi t}{5}\right)$$

$$x_2(t)=\begin{cases}1-|t|/2, & |t|\leq 2\\ 0, & \text{其余 }t\end{cases}$$

基本题

(a) 用解析法证明,在采样时刻 $x_{\mathrm{bl}}(t)$和 $x_{\mathrm{lin}}(t)$都等于样本值 $x(nT)$。这样的内插器称为严格内插器,因为它们保留了原始信号在采样时刻的真正值。这个带限内插和线性内插滤波器是因果的吗?

(b) $x_1(t)$和 $x_2(t)$带限吗？若是，带宽为多少？

(c) 创建一个向量 ts，它包含在区间$|t|\leqslant 4$ 内的采样时刻 $t=nT$。将对应于 ts 的 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的样本存入向量 xs1 和 xs2，用 stem 画出 xs1 和 xs2 对 ts 的图。

为了从这些样本重建 $x_1(t)$和 $x_2(t)$，要注意到这些重建信号在 MATLAB 中仅仅能够在一个有限的样本数上被计算出。因此，你要计算的这些内插信号仅在区间$|t|\leqslant 2$ 的 $t=n/8$ 上；换句话说，在区间$|t|\leqslant 2$ 上，你将含在 xs1 和 xs2 中的每个样本之间计算 3 个样本。因此这个内插信号的采样间隔就是 $T_s=1/8$。

在 MATLAB 中遇到的另一个问题是 $h_{bl}(t)$的无限长持续期问题。一种解决办法是用一种窗口的信号形式来近似 $h_{bl}(t)$。本练习的余下部分将用有限长内插器来代替 $h_{bl}(t)$，

$$h_{\mathrm{blf}}(t)=\begin{cases}h_{\mathrm{bl}}(t), & |t|\leq 2\\ 0, & 其余\ t\end{cases}$$

用这个内插滤波器 $h_{blf}(t)$内插 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的样本所得出的信号称作 $y_{1bl}(t)$和 $y_{2bl}(t)$。相类似地，用线性内插器 $h_{lin}(t)$内插 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的样本所得出的信号称作 $y_{1lin}(t)$和 $y_{2lin}(t)$。

(d) 设 Ti=1/8 并创建一个内插时刻 ti=[-2:Ti:2]的向量。将在内插时刻 $h_{blf}(t)$和 $h_{lin}(t)$的值存入向量 hb1 和 hlin 中。用 plot 展示这两个单位冲激响应对 ti 的图。在采样时刻 ts 上这两个单位冲激响应的值是什么？每个单位冲激响应的峰值都应该在 $t=0$ 处。

中等题

应该注意到，因为 $h_{lin}(t)$和 $h_{blf}(t)$都是仅对于$|t|\leqslant 2$ 为非零，所以在区间$|t|\leqslant 2$ 上的这些内插信号就仅是在区间$|t|\leqslant 4$ 内样本 $x(nT)$的函数。下面的习题将用 conv 从在 xs1 和 xs2 中的样本，在 ti 的内插时刻上重建这些信号。然而，为了考虑到这些内插滤波器的非因果性，并且要保持住与在 xs1 和 xs2 中样本的关系（而这些样本和内插滤波器 hb1 和 hlin 中的样本是对应于不同时刻的样本），所以还是需要许多簿记式的工作。

(e) 计算在 ti 时刻点上的内插信号要求作许多 hlin 或(hb1)移位形式的叠加，每个都用适当的样本值加权。这个求和式等效于一个卷积，它能用函数 conv 来实现。现考虑$x_2(t)$样本的线性内插。第一步是要使在 xs2 中的样本时刻对应于在 hlin 中的样本时刻。这可以用创建如下向量来完成：

```
≫N=4*(length(xs2)-1)+1;
≫xe2=zeros(1,N);
≫xe2(1:4:N)=xs2;
```

在 xe2 中每个元素的时间由 te=[-4:Ti:4]给出。对于在 te 中的每一个时间等于在 ts 中的一个样本时间，xe2 就包含了在 xs2 中的相应值；否则，xe2 是零。用 stem 画出 xe2 对 te 的图，并将它与你的 xs2 图比较。

(f) 利用 conv 将 xe2 与 hlin 作卷积，conv 输出的一个子集含有在时刻 ti 上的线性内插。记住，存在 hlin 中的线性内插器对应于一个非因果滤波器，而 conv 则认为滤波器是因果的。参照 2.1 节有关 conv 如何能用来实现非因果滤波器的说明，提取出对应于|t|≤2 输出的所要求部分，并将它存入向量 y1lin 中。用 plot 展示出 y1lin 对 ti 的图。你的内插应该完全重

复 $x_2(t)$在区间$|t|\leqslant 2$ 上的值。你怎样早就能预计这一结果?

(g) 利用相同过程计算 $x_2(t)$样本的带限内插,记住,你仅需要计算在 ti 时刻上的内插。这个内插与线性内插比较怎样? 请说明原因。

(h) 利用相同过程计算 $x_1(t)$样本的线性和带限内插。记住,你仅需要计算在 ti 时刻上的内插。哪一种内插更为逼真地重现在区间$|t|<2$ 内的原信号 $x_1(t)$?

(i) 说明这两种内插器的相对优缺点。

7.3　增采样和减采样

这个练习要查对一个离散时间信号增采样和减采样是如何影响它的离散时间傅里叶变换(DTFT)的。如果一个离散时间信号原先就是通过采样一个适当带限的连续时间信号而得到的,那么这个已增采样或已减采样的信号就是那些本该以不同采样率对原连续时间信号进行采样而可以得到的样本集合。为此,增采样和减采样常称为采样率转换。和连续时间采样一样,如果一个离散时间信号不是充分带限的,减采样可能会引起混叠。这将使原有信息受到破坏。在单独进行增采样或减采样时,只能在整数因子上增加或降低采样率,但是通过增采样和减采样的组合可以实现任意有理分式的采样率转换。

基本题

(a) 本练习的大多数题都用下面两个信号的有限段进行:

$$x_1[n]=\left(\frac{\sin(0.4\pi(n-62))}{0.4\pi(n-62)}\right)^2 \tag{7.4}$$

$$x_2[n]=\left(\frac{\sin(0.2\pi(n-62))}{0.2\pi(n-62)}\right)^2 \tag{7.5}$$

利用 sinc 命令定义 x1 和 x2 是在 $0\leqslant n\leqslant 124$ 上的这两个信号。用 stem 画出这两个信号。如果你已经恰当地定义了这些信号,那么这两个图都应该指出信号关于它们的最大值是对称的,最大值高度为 1。用解析法确认你的信号在正确的位置上穿过零点。

(b) 用解析法计算由(7.4)式和(7.5)式给出的 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的 DTFT,$X_1(e^{j\omega})$和$X_2(e^{j\omega})$,不考虑信号截断。用 fft 计算位于 x1 和 x2 中的截断信号在 $\omega_k=2\pi k/2\,048, 0\leqslant k\leqslant 2\,047$,上 DTFT 的样本,并将结果存入 X1 和 X2 中。对 X1 和 X2 的幅值产生适当标注的图。这些图与你的解析表达式比较,结果如何?

(c) 定义将信号 $x[n]$扩展 L 倍就是在$x[n]$的每个样本之间插入 $L-1$ 个零值的过程,而形成

$$x_e[n]=\begin{cases} x[n/L], & n=kL,\quad k\ \text{为整数} \\ 0, & \text{其余}\ n \end{cases} \tag{7.6}$$

若 x 是含有 $x[n]$的行向量,以下的命令实现了 L 倍的扩展

```
≫xe = zeros(1,L * length(x));
≫xe(1:L:length(xe)) = x;
```

根据这个模式,定义 xe1 和 xe2 是将 x1 和 x2 扩展因子为 3 的结果,另外定义 Xe1 和 Xe2 是用 fft 计算这个扩展信号 DTFT 的 2 048 个样本。产生这些 DTFT 适当标注的图。以 L

扩展应给出一个 DTFT，$X_e(e^{j\omega})=X(e^{j\omega L})$。你的图与这个相符吗？

如果你想要提高采样率 L 倍，就需要用截止频率 $\omega_c=\pi/L$ 的低通滤波器在 $x_e[n]$ 的样本之间进行内插。这个滤波器将那些位于 $2\pi/L$ 经压缩过的 $X(e^{j\omega})$ 除掉，仅保留以 $\omega=2\pi k$ 为中心的那些 $X(e^{j\omega})$。所得到的频谱就是本该以 L 倍的采样率对原带限连续时间信号采样应得到的频谱。为此，扩展和内插的组合就往往称为对一个信号的增采样。

中等题

如果行向量 x 包含信号 $x[n]$，那么以下的 MATLAB 命令将实现以整数因子 M 的减采样：

```
≫xd=x(1:M:length(x));
```

(d) 根据你在(b)中所求得的 DTFT，对 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 说说是否能被因子 2 减采样而不会产生混叠。如果减采样引入了混叠，指出哪些频率被混叠所污损，哪些未受影响。如果信号能被减采样而又不引起混叠，概略画出减采样信号 DTFT，$X_d(e^{j\omega})$ 的幅值。

(e) 定义 xd1 和 xd2 是以 2 对 x1 和 x2 减采样的结果。定义 Xd1 和 Xd2 是减采样信号的 DTFT 在 0～2π 之间 2 048 个等分样本点上计算出的样本。对这两个 DTFT 的幅值产生适当标注的图。这些图与你在(d)中所画的图相符吗？

(f) 在信号被用 M 减采样之前，一种常用的作法是将信号用频率响应的截止频率等于 π/M 的低通滤波器进行处理。这个滤波器称为抗混叠滤波器。即使这个信号不是带限到 π/M，抗混叠滤波器的输出还能以 M 减采样而不会引起混叠。如果原信号不是带限到 π/M，抗混叠滤波器将会使原信息受到损失；但是和在与信号减采样之前不用这个抗混叠滤波器进行预处理相比，通常还是有更多的信息被保留下来。
在(e)中，你应该发现当减采样时，有一个信号产生了混叠。你能键入

```
≫h=0.5*sinc(0.5*(-32:32)).*(hamming(65)');
```

将 h 定义为截止频率为 $\pi/2$ 的低通滤波器的单位冲激响应。用在(e)中已受混叠的信号作为这个滤波器的输入，然后将其输出以 2 减采样。用 fft 计算减采样信号 DTFT 的 2 048 个样本。对 DTFT 的幅值产生适当标注的图，根据这个图确定原 DTFT 的多少被保留下来。

深入题

(g) 在(e)中对 x 减采样所用的方法保留了奇数号的样本，因为在 x 中的编号是从 1 开始的。如果你改变命令要保留偶数号的样本，那么得到的 DTFT 对于已受到混叠的信号来讲是明显不同的。如果保留偶数号的样本，产生一张由它所得到的 DTFT 幅值图。令 $X_{od}(e^{j\omega})$ 是保留奇数号样本的减采样序列的 DTFT，$X_{ev}(e^{j\omega})$ 是保留偶数号样本的减采样序列的 DTFT。证明，如果减采样信号是有限长，且是实值并关于某一个样本对称，那么 $X_{od}(e^{j\omega})$ 和 $X_{ev}(e^{j\omega})$ 中至少有一个在 $\omega=\pi$ 是零。

(h) 这个题要求向量比 8 192 个元素更长，因此不能用 Student Edition of MATLAB 来做。你

将需要两个数据文件 orig.mat 和 orig10k.mat，它们都在 Computer Explorations Toolbox 中。文件 orig10k.mat 含有在 10 240Hz 采样的一段语音信号。用增采样、减采样、内插滤波器和抗混叠滤波器等的正确级联，可以按任意有理数对一个离散时间信号的有效采样率进行转换。本题要设计一个系统来处理这个语音信号以得到本该以 8 192Hz 采样就能得到的样本。如果 orig10k.mat 已经在你的 MATLABPATH 中，就能键入下列命令将该信号装入：

```
>>load orig10k;
>>who
Your variables are:
x10k
```

为将采样率从 10 240Hz 转换到 8 192Hz，确定增采样或减采样的正确整数因子。这个已转换的信号应该比 x10k 的样本多还是少？先增采样或者先减采样有没有关系？需要用内插和抗混叠滤波器吗？实现你的系统，并用 sound 放出原信号和已转换信号以确认这个已转换的信号。将 orig.mat 装入，它就是原在 8 192Hz 采样的语音信号，确认你的已转换信号听起来和在 orig.mat 中的 x 是一样的。

7.4　带通采样

这个练习要研究当采样一个具有带通特性傅里叶变换的连续时间信号时所出现的问题。采样定理告诉我们，要能够对信号进行理想的重建，一个带限信号必须要用大于该信号带宽的采样率进行采样。对于在频率上是低通性质的实值信号而言，采样频率就是信号中最高频率的两倍。然而，对于一大类带通信号来说，往往有可能在低得多的采样率下进行采样，而没有丢失信号中的任何信息。

考虑实值的窄带鸟声信号，它在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 由下式给出：

$$x(t)=\cos\left(\Omega_{\min}t+\frac{\Omega_{\max}-\Omega_{\min}}{2t_0}t^2\right) \tag{7.7}$$

这个信号的瞬时频率可以用对相位求导，即对该余弦的宗量求导得

$$\Omega(t)=\Omega_{\min}+(\Omega_{\max}-\Omega_{\min})t/t_0 \tag{7.8}$$

如你所见，这个信号的频率随时间从 $\Omega_{\min}$ 到 $\Omega_{\max}$ 线性增加。如果该鸟声信号 $x(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 之外为零，那么它就近似为带限到 $\Omega_{\min}\leqslant|\Omega|\leqslant\Omega_{max}$。在本练习的习题中，设 $\Omega_{\min}=2\pi(2\ 000)\text{rad/s}$，$\Omega_{\max}=2\pi(3\ 000)\text{rad/s}$ 和 $t_0=0.5\text{s}$。

基本题

因为 MATLAB 不能支持连续时间信号，而这个练习又将同时要用离散时间和连续时间信号，所以需要保持一组连续时间轴的样本。重要的是要随时关注在 MATLAB 中用于仿真连续时间信号的样本和从采样得到的离散时间样本之间的差别。为了对连续时间轴进行仿真，对 T=1/8 192 和 t0=0.5，创建时间向量 t=linspace(0,t0,t0/T)。

(a) 在 t 的时刻上创建鸟声信号 $x(t)$，并将它存入 x 中。用(7.8)式，画出在 $0\leqslant t\leqslant0.5\text{s}$ 内的瞬时频率 $x(t)$。用 sound(x,1/T)听听这个鸟声信号。

(b) 利用 fft 和在 x 中的样本,计算出 8 192 个 $x(t)$的连续时间傅里叶变换(CTFT)的样本,并将结果存入向量 X 中。画出 $x(t)$的 CTFT 幅值对 $-\pi/T \leqslant \Omega < \pi/T$ 的图。对频率轴务必适当标注。

(c) 本练习的余下部分假设 $x(t)$的 CTFT 是带通型的,且为

$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & 2\pi(2\,000) < |\Omega| < 2\pi(3\,000)\text{rad/s} \\ 0, & \text{其余 } \Omega \end{cases} \tag{7.9}$$

根据采样定理,为使对该鸟声信号采样而不引起混叠要求的采样率是多少?概略画出以 fs=2 000 的采样率对信号 $x(t)$采样所得 CTFT 的幅值图。注意,是否产生了任何混叠;也就是说,有任何高频映射到较低的频率上去吗?另外请注意,是否 $x(t)$能完全由这组样本恢复。如果能从这些样本恢复,指出你该如何将信号 $x(t)$恢复;如果不能,指出为什么。作为一种验证,创建向量 x1 内含信号 $x_1[n]=x(n/2\,000)$的样本,利用

```
≫plot(linspace(-2000,2000,8192),abs(fftshift(fft(x1,8192))));
```

画出 $x_1(t)$傅里叶变换的幅值。

中等题

这些习题要采用以下的策略用 fs=2048 对实值信号 $x(t)$采样。首先,对信号进行调制,以使得位于 2kHz 和 3kHz 之间的非零能量的频带以 $\Omega=0$ 为中心。第二用低通滤波器过滤该信号。第三用 fs=2048 的采样率对信号采样。

(d) 利用傅里叶变换的调制性质,确定信号 $x_m(t)$的一个解析表达式,它具有和 $x(t)$相同的傅里叶变换,但是以 $\Omega=-2\pi(5000)$rad/s 对称的,即 $X_m(j\Omega)=X(j(\Omega+2\pi(5000)))$。创建一个在 t 的时刻上求值的 $x_m(t)$的向量,并将结果存入向量 xm 中。利用 fft 对 $T=1/8192$s,在 $-\pi/T \leqslant \Omega < \pi/T$ 上创建一张适当标注的 $x_m(t)$的 CTFT 幅值的图。

(e) 现在需要用一个适当选择的截止频率的低通滤波器对 $x_m(t)$过滤,仅保留以零频率为中心的频带内的信号分量。因为在一个等效的采样率 fs=8192Hz 下信号 $x(t)$是包含在向量 xm 中,你就可以用一个离散时间滤波器对 $x(t)$进行低通过滤。这个滤波器有合适的离散时间截止频率,以使得在一个 fs 的采样率上映射回到连续时间时对应于所要求的连续时间截止频率。确定这个离散时间截止频率,并将这个值存入变量 wc 中。为了创建具有这个离散时间截止频率的低通滤波器,利用单位脉冲响应

```
≫h=wc*sinc([-16:16]*wc).*hamming(33)';
```

用 ym=filter(h,1,xm)创建经过滤信号 $x_m(t)$后的信号 $y_m(t)$。利用 fft 创建并画出 $T=1/8\,192$s,在 $-\pi/T \leqslant \Omega < \pi/T$ 频率范围内信号 $y_m(t)$傅里叶变换的幅值。

(f) 因为信号 $y_m(t)$是带限在 ±500Hz 的,所以就能以任何大于 1kHz 的采样率采样而不会丢失信号中的任何信息。从向量 ym 中创建在采样率 2 048Hz 时信号 $y_m(t)$的样本,并将结果存入向量 ym2 中,画出 ym2 的 DTFT 的幅值。

深入题

为了证实 $x(t)$中的全部信息都包含在 ym2 的样本中,现在要重建 $x(t)$。这能够首先应

用带限内插从 ym2 中包含的样本重建序列 ym 来完成。然后将这个信号调制到鸟声信号的中心频率,因此重建包含在向量 x 中的信号。

(g) 第一步用带限内插将采样率提高 4 倍。如果你有 MATLAB 的专业版本,就能利用函数 interp 来完成采样率由 2 048Hz 到 8 192Hz 的转换,只需键入 ymhat = interp(ym2,4)即可。如果你用的是 Student Edition of MATLAB,就必须自己来改变这个采样率(见练习 7.3)

(h) 现在用将在向量 ymhat 中的信号调制到鸟声信号的中心频率的办法恢复相应于原带通信号 $x(t)$的正频率部分的信号。调制用一个复指数,并将结果存入向量 xm 中。利用傅里叶变换的对称性质以及有关信号 $x(t)$是实值信号的知识,恢复信号 $x(t)$的负频率部分,并将正、负频率分量的和存入向量 xm2 中。在适当标注的频率轴上画出 xm2 傅里叶变换的幅值。用 sound 放出 xm2 并与 x 作比较以证实你确实恢复了在8 192Hz 采样率下的信号 $x(t)$。

7.5 半采样间隔延时

将一个离散时间傅里叶变换(DTFT)$X(e^{j\omega})$乘以复指数 $e^{-j\omega n_d}$的效果就是在时域将信号 $x[n]$移位。如果 n_d 是正整数,这就很容易理解为将该离散时间信号延迟而得到 $x[n-n_d]$。当 n_d 不是整数时,这个结果是很难理解的,因为离散时间信号仅能定在宗量的整数值上。在这个练习中要研究一个频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}, \qquad |\omega| < \pi \tag{7.10}$$

的系统的效果。这个系统对输入 $x[n]$的输出肯定不是“$x[n-1/2]$”,因为离散时间信号不能定义在它们自变量的非整数值上。这个练习将把这个系统的输出能看成为如图 7.2 所示系统 $x[n]$带限内插的延时复本的样本,这就称之为“半采样间隔延时”。

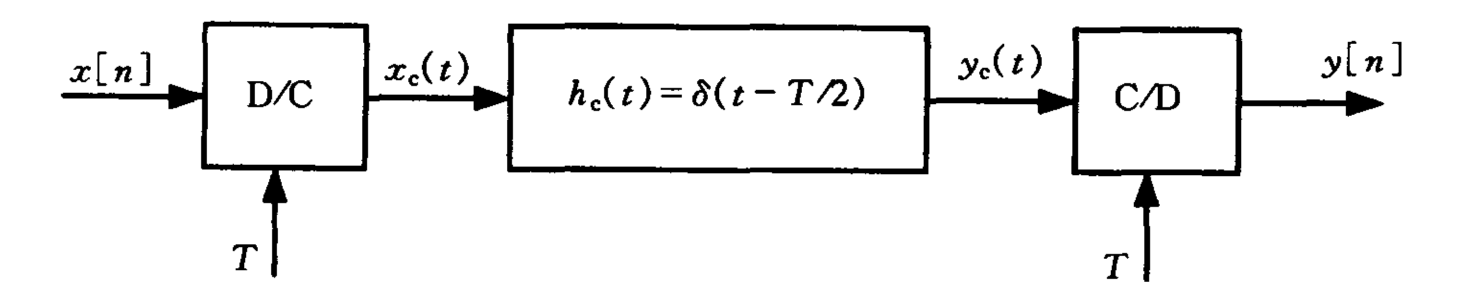


图 7.2 一个离散时间信号 $x[n]$的半采样间隔延时可以用首先确定 $x[n]$经带限内插后的 $x_c(t)$来构成。半采样间隔延时 $y[n]$由采样 $y_c(t)$得到,$y_c(t)$则是连续时间信号 $x_c(t)$延时的结果

基本题

(a) (7.10)式系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = \frac{\sin(\pi(n-1/2))}{\pi(n-1/2)} \tag{7.11}$$

定义 h 包含区间 $-31 \leqslant n \leqslant 32$ 内 $h[n]$的值。利用 stem 产生一张 h 的图。

(b) 对于存在 h 中的单位脉冲应的系统,利用 freqz 计算在 0~π 之间 1 024 个等分频率上的频

率响应。产生一张适当标注的频率响应幅值的图。根据在(a)中的图,你能预计出 $H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$的值吗?

(c) 对于(7.10)式频率响应的半采样间隔延时的系统,系统的群时延是一个常数 n_d。因为群时延是一个常数,当信号通过这个系统时,所有频率都一定有相等的延时。利用函数 grpdelay 计算具有在 h 内的单位脉冲响应的系统的群时延。练习 6.5 说明过 grpdelay 函数的使用。对该系统 n_d 是一个整数吗? 注意,grpdalay 假设系统是因果的,并且 h(1) = h(0),这样由 grpdelay 产生的值将比由(7.11)式估计的值大。

(d) 利用函数 sinc 定义 x 是信号

$$x[n]=\frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n/8} \tag{7.12}$$

式中 $-127\leqslant n\leqslant 127$。利用 filter 计算具有单位脉冲响应为 h 的系统对这个信号的响应,并将结果存入 y。

(e) 用 subplot 产生该系统输入和输出的图。注意,输出信号有一个初始暂态。为了做一个好的比较。将 y 的前 31 个样本除掉。注意 x 有一个唯一的最大值在 $n=0$。y 在某个唯一的样本上达到它的最大值了吗? 输出就是输入的延时复本吗? 或者,这个系统在输入信号上的作用比那个简单延时要复杂得多吗?

(f) 定义 y2 是单位脉冲响应为 h 的系统,当用 y 作为输入时的系统输出。等效地说,这就是两个半采样间隔延时系统的级联。用 subplot 将 y2 与原输入 x 比较。y2 有唯一的最大值吗? 这两个信号是如何关联的? 利用 conv 定义总系统的单位脉冲响应 h2 是 h 本身的卷积。用 stem 画出 h2。在 y2 和 x 的图中你所看到的具有什么意义吗?

中等题

(g) 考虑计算 $x_c(t)$作为 $T=1$ 时 $x[n]$的带限内插;也就是说,假定 $x_c(nT)$的值由$x[n]$给出,而在这些样本之间的连续时间信号则用一个截止频率为 π 的连续时间低通滤波器的内插而得到。写出对于在(d)中定义的信号 $x[n]$的 $x_c(t)$的解析表达式。

(h) 在(c)中你求得的群时延是样本的单位,将它转换到连续时间,有 $T=1$s/样本。连续时间信号应该延时多少秒才能引入一个延时与由 h 给出的单位脉冲响应的离散时间系统产生的延时相当? 写出 $y_c(t)$的解析表达式,它是按照这个量将内插信号 $x_c(t)$延时的结果。

(i)现在你已经定义 $y_c(t)$是输入带限内插的延时复本,你仅需要对这个信号重新采样以计算半采样间隔延时。定义 yc 是每 $T=1$s 采样 $y_c(t)$得到的值。用 hold 函数产生一张图,在图中 yc 的值是用 plot 由实线连起来的,而 y 则是用 stem 画出的。除了初始暂态部分外,y 的值落在了由 yc 给定的线上吗?

7.6 离散时间微分

一个微分器就是按图 7.1 所示,用连续时间信号的离散时间处理能实现一个连续时间系统的例子。在很多实际情况下,用一个理想的微分器会有很多问题,因为微分器要放大输入信号中任何高频噪声。为此,通常希望用一个带限微分器,其中截止频率是带限到高于所希望输入中的最高频率。这个练习要考虑能用来在离散时间实现带限微分滤波器的有限脉冲响应

较怎样?

(f) 在 $\Omega_c=\pi/10$ 和 $T=1$ 时,产生信号 $x_c(t)=\cos(\Omega_c t)$在区间 $0\leqslant t\leqslant 100$ 内的样本。将这一结果存入向量 xd。在 $0\leqslant t\leqslant 100$ 范围内画出 $x_d[n]=x_c(nT)$。

(g) 由(e)中利用 yd=conv(h,xd),用这个离散时间微分器处理采样信号 $x_d[n]$来求得信号 $x_c(t)$的导数。因为你正在用一个因果滤波器实现这个微分器,而理想微分器是非因果的,因此你所得到的 xd 一定要延时 n_d 个样本,这里 n_d 就是这个滤波器对称点,即对于 $N=17,n_d=8$。(参见 2.1 节有关利用 conv 如何实现非因果滤波的讨论)。用解析法确定 $x_c(t-n_d)$的导数,并将这个导数的样本存入向量 ytrue。在同一坐标轴上画出 $20\leqslant t\leqslant 100$ 内 xd,yd,和 ytrue 的图。这个离散时间微分器大约给出了由解析确定的在采样值上的相同答案吗?

如果你已经有了函数 interp,那么 yd2=interp(yd,N)就能用来从 yd 计算信号 $y_c(nT/N)$更为精确的一组时间样本。这对比较离散时间微分器的输出和由解析确定的输出是有帮助的。例如,键入

```
>>plot(interp(n*T,N),[interp(xd',N)interp(yd',N)interp(ytrue',N)]);
```

将画出三个信号 $x_c(t)$,$y_c(t)$和 $\mathrm{d}x_c(t)/\mathrm{d}t$ 中的每一个在时间样本 $t=nT/N$ 上的图。

(h) 对 $\Omega_c=\pi/4,3\pi/4$ 和 $5\pi/4$ 重复做(f)和(g)。对哪个频率,这个离散时间微分器执行了较好的微分?你能预计到这一点吗?

中等题

正如你已经观察到的,(7.15)式的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$在 $\omega=\pm\pi$ 有一个不连续点,这个不连续点会在加窗得到的频率响应中引起大的波纹。如果将 $H_d(e^{j\omega})$和 $h_d[n]$修改为包括一个"半采样间隔延时"的话,这个不连续点可以避免,即

$$H_d(e^{j\omega}) = j\omega e^{-j\omega/2},\ -\pi<\omega<\pi \tag{7.18}$$

$$h_d[n] = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \tag{7.19}$$

注意,$h_d[n]$是关于"$n=1/2$"反对称的,而不再是关于 $n=0$。当 $h_d[n]$延时并乘以一个因果窗函数时,要保留你所要求的对称性。为了保证这点,加到 $h_d[n-n_d]$的窗函数 $w[n]$必须有下面对称性:

$$w[n] = w[N-n-1] \tag{7.20}$$

并且窗口长度 N 必须是偶数。

下面的习题考虑 $h[n]=h_d[n-n_d]w[n]$,$h_d[n]$由(7.19)式给出,而 $w[n]$具有(7.20)式的对称性。选择一个适当的 n_d 值以使得你的窗函数是因果的。

(i) 产生并画出当 $w[n]$为 $N=16$ 的矩形窗时,对应于 $h[n]$的 $H(e^{j\omega})$的幅值和相位。明确指出这个频率响应与在(e)中得到的进行比较后的结论如何?

深入题

频率采样是窗口法的另一种方法,在练习 5.4 节曾讨论过。频率采样容许利用同一个理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$,而采用偶数或奇数长的滤波器设计。下面的一组习题,仍用由(7.15)式给出的 $H_d(e^{j\omega})$。在这个方法中,选取 $h[n]$是由

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

给出的 N 个等分 $H_d(e^{j\omega})$ 样本的 ifft。令 $H[k+1] = H_d(e^{j\omega_k})$。考虑 h = ifft(H)。根据 DTFT 和它的逆的定义，$h[n]$ 在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 之外一定是零。然而，微分器的单位脉冲响应应该有关于某一点（可能不是一个整数）奇对称，所以 $H_d(e^{j\omega_k})$ 可能需要在计算逆 DTFT 之前乘一个适当的线性相位因子 $e^{-j\alpha\omega_k}$。

注意：由于计算中舍入误差的关系，函数 ifft 的输出可以是复数。单位脉冲响应 $h[n]$ 应该是实的，所以可能需要取 ifft 输出的实部。如果 ifft 输出包括任何显著的虚部分量（大于 10^{-10}），很可能已经有错了。

(j) 对 $N=19$，产生并画出 $h[n]$ 以使得

$$H(e^{j\omega_k}) = H_d(e^{j\omega_k})e^{-j\alpha\omega_k}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

确定一个合适的 α 值（如果需要），使得 $h[n]$ 有合理的对称性。同时，根据 $h[n]$，产生并画出 $H(e^{j\omega})$ 的幅值和相位。

(k) 对 $N=18$ 重做(j)。

(l) 你应该看到，在(k)中得到的频率响应是更好一些，也即比(j)的频率响应有较小的波纹，尽管滤波器有较短的长度。请解释一下为什么。

提示：检查一下在两种情况下，在 $\omega=\pi$ 附近的过渡带。

第 8 章

通信系统

这一章要讨论用于信息传输的各种技术。通信系统是用来传送信号的,这既包括像在局域计算机网中的短距离通信,又包括像在卫星广播系统的远距离通信。除了已经学习过的时域方法外,傅里叶变换也能用于设计和分析这些通信系统的性能。在传送之前处理信号的两种常用方法是幅度调制(AM)和频率调制(FM)。如果 $x(t)$是要待传送的信号(有时称为消息信号),那么用正弦的幅度调制就是

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_c t) \tag{8.1}$$

这里频率 ω_c 称为该正弦的载波频率。类似地,对于离散时间系统用正弦载波的幅度调制就是 $y[n]=x[n]\cos(\omega_c n)$。已调信号 $y(t)$的连续时间傅里叶变换

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left(X(j(\omega - \omega_c)) + X(j(\omega + \omega_c))\right) \tag{8.2}$$

为正弦幅度调制的潜在应用提供了广阔的前景。假设 $x(t)$带限,而载波频率又足够高,那么正弦幅度调制就能用来将消息信号 $x(t)$"搬移"到一个更适合传输的频带上去。例如,尽管接近 1kHz 的低频信号很快被大气层衰减掉,但是在 1MHz 范围内的频率却能传播到很远距离而不衰减。这就是 AM 和 FM 无线电信号在 500kHz 到 100MHz 范围被发射的理由,即使消息信号是在 50Hz 到 20kHz 的范围内。调制也能用于在单一信道上传输多个用户的消息。在很多系统中,目的就是要能在一条信道的有限带宽内同时传送最大的用户个数。在练习 8.1 中要讨论正弦幅度调制的一种变形,它能使已调信号所占据的带宽最小。练习 8.2 给出了正弦幅度调制的一种向量表示。有关发送和接收之间相位失配方面的影响将用语音传输(如电话线)在练习 8.3 中讨论。

利用正弦载波的幅度调制在互不重叠的频带上同时传送几个不同的消息信号,这种方法称为频分多路复用。传送多个信号的另一种方法是时分多路复用;这时,各消息信号占据互不重叠的时隙。和频分多路复用一样,能够在一条信道上传送的用户数主要取决于消息信号的带宽和传输信道的带宽。练习 8.4 讨论信道带宽在时分多路复用中的影响;在这个练习中,要用一个脉冲串的幅度调制实现时分多路复用。

作为无线电发射和接收来讲,在某些情况下频率调制比幅度调制乐于采纳,练习 8.5 将包括几个基本的频率调制的例子。

8.1 希尔伯特变换和单边带 AM

在离散时间中,用正弦载波的幅度调制是

$$y[n] = x[n]\cos(\omega_c n) \tag{8.3}$$

式中假设消息信号的带宽小于 ω_c。已调信号有一个 DTFT,它是分别以 $\omega = \pm\omega_c$ 为中心的 $X(e^{j\omega})$的重复。如果人们总想让在一条通信信道上同时传送最大的用户数,这个重复的部分是不希望的。一种天真的解决办法是用复指数载波 $e^{j\omega_c n}$来替代正弦载波。然而,所得到的已调信号 $x[n]e^{j\omega_c n}$有一个虚部分量,而这个是无法在一个真实的信道上传送的。单边带(SSB)调制是一种合适的解决办法,它等效于在传输之前用截止频率为 ω_c 的理想低通滤波器对 $y[n]$滤波,这个滤波后的信号占有和 $x[n]$相同的频带宽度,而且 $x[n]$能完全从已发送的信号中恢复出来。

这个练习将考虑构成(SSB)信号的另外一种方法。这个方法要用到希尔伯特变换。一个理想希尔伯特变换的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 \leqslant \omega < \pi \\ j, & -\pi \leqslant \omega < 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

由于在(8.4)式中 $H(e^{j\omega})$的相位关系,希尔伯特变换也称作 90°相移器。除了在单边带调制中应用外,它还有许多实际应用[①]。

基本题

理想希尔伯特变换的单位脉冲响应既是非因果的,又有无限长。在这些题中将考虑一个移位并加窗了的理想希尔伯特变换单位脉冲响应的形式。加窗就将单位脉冲响应变成有限长,而移位则是为了实现一个单位脉冲响应的因果近似。

(a) 根据(8.4)式,理想希尔伯特变换的单位脉冲响应 $h[n]$具有什么样的对称性?

(b) 考虑频率响应为 $H_\alpha(e^{j\omega}) = e^{-j\alpha\omega}H(e^{j\omega})$的系统,式中 $H(e^{j\omega})$如(8.4)式定义。概略画出这个系统频率响应的幅值和相位。

(c) 导出频率响应为 $H_\alpha(e^{j\omega})$系统的单位脉冲响应 $h_\alpha[n]$。如果 α 是整数,关于什么 n 值,$h_\alpha[n]$是对称的?

(d) 对于 $\alpha = 20$,将区间 $0 \leqslant n \leqslant 40$ 内的 $h_\alpha[n]$的值存入向量 h 中。注意,α 选成使 h(n+1)关于 n=20 对称。利用 stem 画出 h 对 n 的图。

(e) 利用 fft(h,256)求得这个经加窗和移位的单位脉冲响应的 DTFT 样本。画出这个傅里叶变换的幅值和相位,并务必对频率轴给予适当标注。当画相位图时,确信首先用 fftshift 将频率响应的样本重新排序,然后用 unwrap 得到连续相位响应。这个幅值和相位与理想希尔伯特变换的幅值和相位比较如何?

现在将用这个经移位和加窗了的希尔伯特变换对正弦信号 $x[n] = \sin(\pi n/8)$进行滤波。

(f) 什么是理想希尔伯特变换对输入 $\sin(\pi n/8)$的响应? 如果 α 是一个整数,系统 $H_\alpha(e^{j\omega})$对输入 $\sin(\pi n/8)$的响应是什么?

(g) 将在区间 $0 \leqslant n \leqslant 128$ 内 $x[n]$的值存入 x 中,利用 conv(h,x)近似实现在区间 $20 \leqslant n \leqslant 148$ 内的卷积 $h_\alpha[n] * x[n]$(近似是由于在输入信号 $x[n]$和单位脉冲响应 $h_\alpha[n]$上做了截

---

① 有关希尔伯特变换,参见 Signals and Systems: Continuous and Discrete by Ziemer, Tranter, and Fannin,或更深入的教科书 Discrete-time Signal Processing by Oppenheim and Schafer。

断引起的)。将这些样本存入向量 xh 中。在同一坐标轴上画出 x 和这个移位希尔伯特变换的 $h_a[n]*x[n]$的图。不要去考虑由于在输入信号上加窗而产生的暂态，xh 与在(f)中所预计的响应比较如何？说明它们之间的差异。

(h) 卷积 $h_a[n]*x[n]$是 $x[n]$的希尔伯特变换的一种移位形式，并且你必须要考虑这个移位。向量 xh 既包括了 $h_a[n]*x[n]$在区间 $20\leqslant n\leqslant 148$ 内的样本，也包括了 $h[n]*x[n]$在区间 $0\leqslant n\leqslant 128$ 内的样本。在同一组坐标轴上画出 x 和存在 xh 中的希尔伯特变换 $h[n]*x[n]$的样本的图。不要考虑在计算希尔伯特变换中引起的暂态，利用在(f)中导得的信号证实你已经恰当地实现了希尔伯特变换。

现在你能够实现一个希尔伯特变换了，你就能用它来构造一个单边带调制系统。

中等题

计算一个信号 $x[n]$的 SSB 调制的系统如图 8.1 所示。信号 $y[n]$包含了信号 $x[n]$的单边带调制。现在要对输入信号实现这个系统。假设载波频率 $\omega_c=\pi/2$。

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi(n-32)/4)}{\pi(n-32)/4}, & 0\leqslant n\leqslant 64\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases} \tag{8.5}$$

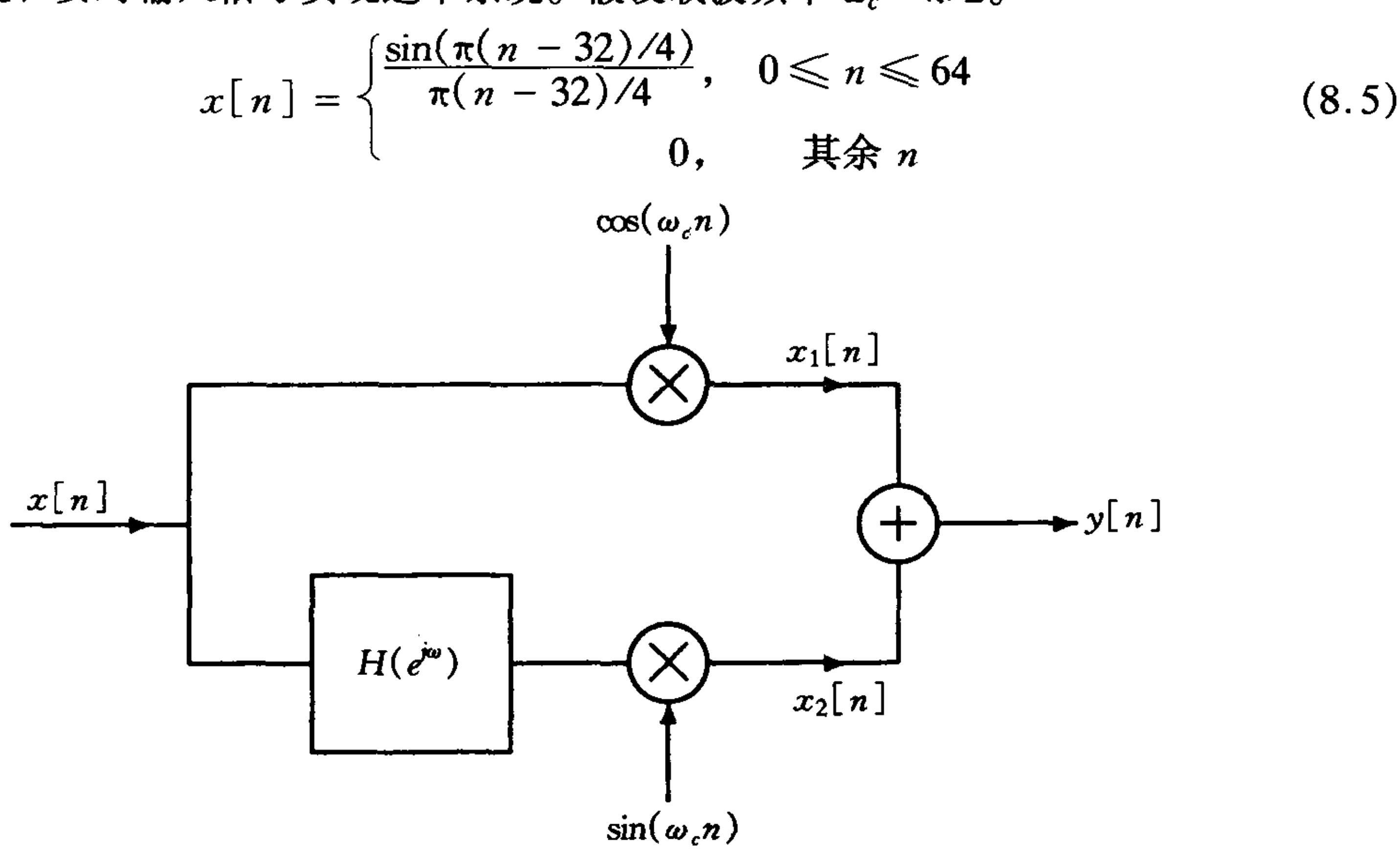


图 8.1 图 8.1 利用希尔伯特变换 $H(e^{j\omega})$和正弦调制得到 $x[n]$的单边带调制的系统

(i) 将 $x[n]$的非零元素存入向量 x 中，用 fft(x,256)求得 $x[n]$的 DTFT 的 256 个样本。画出这个 DTFT 的幅值，并将频率轴适当标注。确定信号 $x[n]$所占有的近似频带宽度。

(j) 将 $x[n]\cos(\omega_c n)$的非零样本存入 x1 中。用 fft 计算 $x_1[n]=x[n]\cos(\omega_c n)$的 DTFT 的 256 个样本。画出这个 DTFT 的图，并途述它与(i)中所画的 $x[n]$的 DTFT 有什么关系。

(k) 用 conv(h,x)计算信号 $x[n]$在区间 $0\leqslant n\leqslant 64$ 上的希尔伯特变换，将这个信号存入 xh 中。要注意，在从 conv(h,x)的输出中挑选出向量 xh 时，要做一些繁琐的但是必要的簿记式的工作。要记住，存在 h 中的这个滤波器是希尔伯特变换的一种延时的复本。而 conv 计算的是卷积 $h_a[n]*x[n]$在区间 $0\leqslant n\leqslant 64$ 以外的值，因为按假设 $x[n]$在区间 $0\leqslant n$

≤64 以外是零。

提示:在向量 xh 中的对称点应该和向量 x 中的对称点是相同的。

(l) 用 fft(xh,256)计算存在 xh 中的这个信号 DTFT 的样本。画出这个 DTFT 的幅值图。

(m) 将 $x_2[n]=x_h[n]\sin(\omega_c n)$的值存入 x2,其中 $0\leqslant n\leqslant 64$,而 xh 含有在这个区间内的 $x_h[n]$。利用 fft 计算存在 x2 中信号 DTFT 的 256 个样本,画出 x2 的 DTFT 的幅值,并叙述它与(l)中所画 $x_h[n]$的 DTFT 幅值有什么关系。

(n) 现在你已经综合出构成已调信号 $y[n]$所必需的两个信号,$y[n]$就是图 8.1 系统的输出。将在区间 $0\leqslant n\leqslant 64$ 内这个信号的值存入 y 中,用 fft(y,256)计算存在 y 中的这个信号的 DTFT 的样本。画出这个 DTFT 的幅值图,并给频率轴适当标注。这个图应该表明 y 包含了(8.5)式 $x[n]$的 SSB 调制。在什么频率范围内,DTFT 基本为零?存在 y 中的信号近似地要求与 $x[n]$相同的带宽吗?(这时带宽定义为被信号占有的频率区间的宽度之和)。

深入题

不费多大劲就能对信号 $y[n]$解调以恢复 $x[n]$。第一步将存在 $y[n]$中的单边带信号用一个正弦来调制,什么是这个正弦的正确频率?画出这个信号的 DTFT 并确信 $x[n]$能被可靠地恢复。

如果 $y_m[n]$是用一个正弦调制 $y[n]$的结果,那么第二步就是低通过滤这个已调信号。这个低通滤波器可以用加窗的 sinc 函数为

$$h_{lp}[n]=\begin{cases}A\dfrac{\sin(\omega_0 n)}{\omega_0 n}, & -32\leqslant n\leqslant 32\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}\tag{8.6}$$

其中 ω_0 是该低通滤波器的截止频率,A 是适当的归一化值。能用来恢复 $x[n]$的截止频率的近似范围是多少?

在选定了适当的截止频率和归一化值后,用这个低通滤波器恢复在区间 $0\leqslant n\leqslant 64$ 内的 $x[n]$。将这个已恢复的信号与存在 x 中的原信号进行比较,差别应该很小,在 10^{-3}量级上。

8.2 含载波幅度调制的向量分析

由(8.1)式给出的正弦幅度调制的一个缺点是在接收端的正弦载波必须要与发射端的正弦载波同相位。在非同步传输中,接收机不知道发射机的载波相位,而必须要对它作出估计。对于非同步的 AM 传输的一种方法是发送这个信号

$$y(t)=(A+x(t))\cos(\omega_c t)$$

这就是含载波的正弦 AM,因为已调信号 $y(t)$中包含了载波 $A\cos(\omega_c t)$。如果 $A+x(t)>0$,那么这个消息信号的解调就能用跟踪发送信号 $y(t)$的包络来完成。这个练习要从向量的观点检查含载波的正弦 AM。

基本题

这一组习题考虑非同步 AM 调制的一个简单情况,这里消息信号 $x(t)$是频率为 ω_m,幅度

为 m 的正弦信号,即

$$y(t) = (A + m\cos(\omega_m t))\cos(\omega_c t)$$

(a) 概略画出信号 $y[t]$的连续时间傅里叶变换(CTFT)。假设 $\omega_c \gg \omega_m$,$A > m$。

(b) 对于 $A = 1$,$m = 0.5$,$\omega_c = 40\pi$ 和 $\omega_m = 10\pi$ 的 $y(t)$,将 $y(t)$在时间样本 t = linspace(0,1,500)上的值存入向量 y 中。画出 y 对 t 的图。将设 $m = 1$ 所得 $y(t)$存入 y2 中,画出 y2 对 t 的图。对于什么 m 值,一个包络检波器能用来对消息信号 $x(t) = m\cos(\omega_m t)$ 解调?

信号 $y(t)$可重新写成 3 项之和

$$y(t) = A\cos(\omega_c t) + \frac{Am}{2}(\cos((\omega_c + \omega_m)t) + \cos((\omega_c - \omega_m)t))$$

只要注意到 $\cos(\theta)$是 $e^{j\theta}$的实部,那么在 $y(t)$中的每一个余弦部分都能看成是向量 $Ae^{j\omega_c t}$,$(Am/2)e^{j(\omega_c+\omega_m)t}$和$(Am/2)e^{j(\omega_c-\omega_m)t}$在实轴上的投影。第一项可认为是长度为 A,以速率 $\omega_c$rad/s 环绕原点旋转的一个向量。接下来两项就能看成是环绕这个向量的顶端以 ω_m *rad/s* 速率以相反的方向旋转的向量。这两个比较小的向量环绕原点的总旋转速率分别是$(\omega_c + \omega_m)$和$(\omega_c - \omega_m)$ rad/s。信号 $y(t)$就是这 3 个向量的和在实轴上的投影。

(c) 将 m 改变到$m = 0.05$。对于在 t 的时间样本上,将三个向量。$Ae^{j\omega_c t}$,$(Am/2)e^{j(\omega_c+\omega_m)t}$和$(Am/2)e^{j(\omega_c-\omega_m)t}$分别存入 MATLAB 向量 y1,y2 和 y3 中。如果你已经正确地构造出这些向量,那么执行以下代码

```
>> plot([0 real(y1(1))],[0 imag(y1(1))],'w-');
>> hold on;
>> plot(real([y1(1)  y1(1)+y2(1)]),imag([y1(1)  y1(1)+y2(1)]),'r-');
>> plot(real([y1(1)  y1(1)+y3(1)]),imag([y1 (1)  y1(1)+y3(1)]),'g-');
```

将画出在原点起始的第一个向量和在这个向量顶端起始的两个较小的向量。

中等题

(d) 将下面代码空缺的部分填齐,这段代码展示出前 50 个代表 $y(t)$的相继向量。代码段<<<A>>>标出以$(\omega_m + \omega_c)$ rad/s 旋转的这个小向量的顶端位置,代码段<<<B>>>>标出这三个向量和的顶端位置。

```
>> for k=1:50
    plot(real([<<<A>>>]),imag([<<<A>>>]),'ro');
    hold on
    plot(real([y1(k)+y3(k)]),imag([y1(k)+y3(k)]),'go');
    plot(real([y1(k) <<<A>>>]),imag([y1(k) <<<A>>>]),'r--');
    plot(real([y1(k) y1(k)+y3(k)]),imag([y1(k)  y1(k)+y3(k)]),'g--');
    plot(real([0  <<<B>>>]),imag([0  <<<B>>>]),'w-');
    plot(real([<<<B>>>]),imag([<<<B>>>]),'wx');
    axis([-1.5  1.5  -1.5  1.5]);
    axis('square')
    hold off
```

```
        pause(.1)
    end
```

利用你完成的代码,对 k=[5 10 15 20]作图

(e) 在(d)给出的 for 循环中加一行代码,它将向量的和在实轴上的投影存入向量 projy 中。另外在循环中再加一行代码,它把'x'画在这个位置的实轴上。画出 projy 对 t 的图,并将这张图与在(b)中的图作比较。

8.3 幅度解调和接收机同步

这个作业要研究在语音信号的正弦幅度调制和解调中涉及的有关问题,其中包括发射机和接收机之间的同步问题。一个正弦 AM 信号的一般形式为

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$$

其中 $x(t)$称为消息信号,ω_c 是 AM 信号的载波频率。在接收机端,通过一种称为同步 AM 解调的技术可以将消息信号 $x(t)$恢复,这可经由

$$\begin{aligned} w(t) &= 2y(t)\cos(\omega_c t) \\ &= 2x(t)\cos^2(\omega_c t) \\ &= x(t)(1 + \cos(2\omega_c t)) \end{aligned}$$

为了恢复 $x(t)$,可以将 $w(t)$通过低通滤波消除以 $2\omega_c$ 为中心的频谱分量。在这种类型的 AM 系统中一个潜在的困难是接收机必须要有一个与发射机同步的本地振荡器。如果发射机和接收机的振荡器之间存在一个相位差的话,那么就会发生某种解调失真。例如,如果载波信号是 $\cos(\omega_c t)$,而解调器信号是 $\cos(\omega_c t + \phi)$,那么 $w(t)$将是

$$\begin{aligned} w(t) &= x(t)\cos(\omega_c t)\cos(\omega_c t + \phi) \\ &= x(t)(\cos(\phi) + \cos(2\omega_c t + \phi)) \end{aligned}$$

取决于接收机和发射机之间的相位失配程度,$x(t)\cos(\phi)$可以在全部 t 上事实上为零。这个问题要更详细地在下面习题中讨论。如果消息信号 $x(t)$总是正的,即 $x(t)>0$,那么同步问题可以避免。这时,一个包络检波器就能够用来对信号 $x(t)$解调而勿需任何相位同步。在这样的非同步 AM 系统中,一个正的常数 A 往往要加到消息信号上去以确保它的正值性,即

$$y(t) = (A + x(t))\cos(\omega_c t) \tag{8.7}$$

其中 A 选成 $A + x(t)>0$。

基本题

这些习题包括了当用同步 AM 调制发送一个语音信号时所遇到的一些问题。你将用的这个语音信号是在文件 origbl.mat 中,它是在 Computer Explorations Toolbox 中。这个文件能用键入 load origbl 装入。因为这个语音是在 fs=8 192Hz 下采样的,所以你将用在这个采样率下的一组时间样本去仿真连续时间信号,即 t=[0:1/fs:N/fs],这里 N=length(x)。用执行命令 sound(x,8 192)证实你已经正确地装入了这个语言信号。你应该听到稍微有点压抑的短语"line up"。因为已将这个语音信号带限至 1 000Hz,所以听起来是有些压抑的声音。

(a) 用 fft 计算 x 的 CTFT 的 8 192 个样本,并将结果存入 x 中。完成一张适当标注的 x 的

证实你的结果。

(h) 除了发射机和接收机之间初始相位的不确定性外，常常还存在随机的漂移。这样的相位差异有很多原因引起，其中包括两个系统之间元件的变化，或者从发射到接收传播路径的改变等等。对于这一部分，假设由接收机观察到的载波相位是一个随机相位抖动的和，并由 phin＝cumsum(randn(1,N) * 0.01)给出，而构成接收信号为

```
≫ y=(A+x). * cos(2 * pi * fc * t+phin);
```

画出 phin 对 t 的图，看看发射机和接收机之间相位的漂移。用一个在(g)中提到的 PLL 来恢复这个语言信号，并用 sound 证实你的结果。PLL 锁住接收信号相位的能力是相位抖动的 RMS 值(均方根值，本例中是置在 0.01)，自适应参数 alpha 和附加载波幅度 A 的函数。改变每一个参数都能研究它们是如何影响 PLL 锁到发射机载波相位的能力的。

8.4 PAM 系统中的码间干扰

在脉冲幅度调制(PAM)系统中，一个离散时间消息在一条通信信道上是用调制一个周期重复的脉冲来传送的。取决于信道的带宽限制和这个脉冲形状的时间特性，被调制的这个脉冲所发送的每个消息样本可以在相邻的消息样本之间无干扰地被接收到。然而，如果传输信道的带宽限制造成了传送脉冲在时间上弥散，那么就能发生显著的码间干扰(ISI)。这个练习要研究在 PAM 系统内所引起的 ISI 的有关问题。

对这个练习考虑一种简单的二进制通信系统，其中“1”是用传送脉冲 $p(t)$来表示，而“0”则用传送脉冲的负值，即 $-p(t)$来表示。这称为双极性(antipodal)信令。在整个练习中要用的 $p(t)$为

$$p(t)=\begin{cases}1-|t|/T, & |t|<T\\ 0, & 其余\ t\end{cases} \tag{8.8}$$

这些脉冲传输速率是每秒 f_b 个脉冲，称之为二进制 PAM 系统的比特率。这个练习的余下部分都假定 $T=0.1$，将考虑两种可能的比特率值，即 fb＝1/T 和 fb＝1/(2T)。

基本题

(a) 为了仿真连续时间信号，需要一组时间样本，供给信号能画出来。在时间样本[－T:dt:T]，dt＝T/10 上产生脉冲 $p(t)$，并将结果存入向量 p 中，画出在该范围内的 p。

(b) 确定在传送波形中没有任何码间干扰的最大 f_b 值。这就是说，在信号 $y(t)=\sum_{k=1}^{N}p(t-k/f_b)$ 中 N 个脉冲不重叠的最大 f_b 值是什么？在该比特率下所取的并且位于脉冲峰值的样本不受码间干扰影响的最大 f_b 值是什么，也即

$y(n/f_b)=\sum_{k=1}^{N}p((n-k)/f_b)=p(0)$?

眼图是一种用视觉估计脉冲形状并决定所产生码间干扰程度的常用手段。一张眼图是这样展现出来的：产生一个随机二进制序列，并用等于示波器水平扫描速率整数倍的比特率在示波器上展示所得到的信号。在示波屏上全部脉冲形状都互相重叠在一起。一张眼图对于确定一部接收机从接收波形中正确解出比特流的能力是一个有用的工具。在眼图中你看到所有可能的比特电平和输出电平之间的转移。一部接收机可能就只是对接收的信号采样，并必须判

断这个信号根据这个值对应的是“0”或是“1”。当在相应的比特率时刻上察看时，这些输出电平的相对张开程度将指出一部接收机对可能附加到信号上的噪声有多灵敏。如果张开得大，那么大的噪声才可能引入1比特误差。从眼图上也能容易看出信号对定时误差的灵敏度。因为这些脉冲都趋向于有一个分开在这个比特率下采样各信号电平的张开的区域，因此眼图往往像一只眼睛。如果这个信号对加性噪声灵敏，眼睛就从顶部和底部闭合。如果信号对定时误差灵敏，那么眼睛就从两边开始闭合。下面给出的 eyediagram 对信号 y 画出了在扫描速率 fb 和采样周期 dt 下的眼图。M 文件 eyediagram.m 包含在 Computer Explorations Toolbox 中，这可以按前言所列地址从 The MathWorks 公司得到。

```
function eyediagram(y,fb,dt)
% eyediagram(y,fb,dt) plots the eye diagram associated with the PAM
% system using the signal y at a sweep rate fb and at sampling period
% of dt.

tindcs=[0:dt:2/fb];
hold off
for k=4:length(y)*dt*fb-1-4,
  indcs=[(k-1)/fb/dt:(k+1)/fb/dt]+1;
  plot(tindcs,y(indcs));
  hold on
end
hold off
```

对下列习题，假设 N=20。

(c) 对脉冲 p，概略画出下列每种情况下的眼图：

  (ⅰ) $f_b=1/T$，全部序列均为“1”；

  (ⅱ) $f_b=1/T$，“1”和“0”交替出现的序列；

  (ⅲ) $f_b==1/(2T)$时上面两种情况；

  (ⅳ) $f_b=1/T$，“1”和“0”的随机序列；

  (ⅴ) $f_b=1/(2T)$，“1”和“0”的随机序列。

(d) 创建信号 $y(t)$，它对应于在 $f_b=1/T$ 比特率时 N 个“1”。这可以这样来实现：在该比特率下创建一个冲激串，并将这个结果与这个脉冲形状卷积。例如，这段代码

```
>> y=zeros(1,N*T/dt);
>> y(1:(1/fb)/dt:N*Tdt)=ones(1,N));
>> y=conv(y,p);
```

就将存在 p 中的脉冲在比特率 fb 下放置了 N 个复本。创建如上所给出的向量 y，并用 stem 画出 y 对 t 的图。用函数 eyediagram 画出对应于在(c)-ⅰ 的眼图。将它们进行比较，结果如何？

(e) 创建向量 y2，它包含了对应于在比特率 $f_b=1/T$ 时，“1”和“0”交替序列的 N 个脉冲。用 stam 画出 y2 对 t 的图。用 eyediagram 画出 y2 的眼图。将它与(c)-ⅱ 的图比转结果如何？

(f) 创建向量 y3,它包含了对应于在比特率 $f_b=1/(2T)$时,N 个"1"的序列脉冲。用 stem 画出 y3 对 t 的图。用 eyediagram 画出 y3 的眼图。将它与(c)-ⅲ 的图比较结果如何?

(g) 创建向量 y4,它包括了对应于在比特率 $f_b=1/(2T)$时,"1"和"0"交替序列的 N 个脉冲。用 stem 画出 y4 对 t 的图。用 eyediagrem 画出 y4 的眼图。将它与(c)-ⅲ 的图比较结果如何?

中等题

(h) 利用 rand 创建一个 N=100 的随机比特向量,也即创建向量 a,它含有 100 条随机选取"1"或"0"的记录。这个向量可这样创建

```
≫ a=rand(1,N)>0.5;
```

创建向量 y5,它包含在比特率 $f_b=1/T$ 下,相应于在向量 a 中的"1"和"0"序列的 N=100 个脉冲。用 stem 画出 y5 对时间的图。用 eyediagram 画出 y5 的眼图。将它与(c)-ⅳ 的图比较结果如何?

(i) 创建向量 y6,它包含在比特率 $f_b=1/(2T)$下,相应于在向量 a 中的"1"和"0"序列的 N=100 个脉冲。用 stem 画出 y6 对时间的图。用 eyediagram 画出 y6 的眼图。将它与(c)-ⅴ 的图比较结果如何?

深入题

在发送信号中除了脉冲形状和相对间距外,传输信道的带宽限制也能在 PAM 系统中引入 ISI。考虑在具有单位冲激响应 $h(t)$的一条信道上传送按前面所定义的信号 $y(t)$,在接收机中任何在脉冲形状 $p(t)$上的时间弥散也可以影响到 PAM 系统中的眼图。本练习余下的习题将考虑一个带限的线性相位信道,其单位冲激响应为下面所定义的两者之一:

```
≫ h1=hamming(41)'.*sinc((t(1:41)-2*T)*2/T);
≫ h2=hamming(41)'.*sinc((t(1:41)-2*T)/T);
```

(j) 创建信号 w5,它相应于如果信号 y5 通过单位冲激响为 h1 的信道在接收机端所观察到的信号。用 eyediagram 画出 w5 的眼图。指出信道的带宽限制如何影响了这个输出信号。具体评论一下这个眼图是如何受影响的,以及和接收机作出比特判决能力的关系怎样,也就是说判断是否这个接收到的脉冲对应的是一个"1"或是一个"0"能力。考虑加性噪声在接收机作比特判决上的影响,并指出信道带宽限制与加性噪声一起是如何会使通信性能变坏的。如果比特判决是用在脉冲峰值位置对 w5 采样,什么是会产生一个比特误码的最小加性噪声电平?

(k) 对信道用单位冲激响应 h2 重做(j)。这两个结果比较下来结果怎样? 根据这两个信道的相对带宽你能解释这个吗?

(l) 信道仍用单位冲激响应 h2,但比特率为 $f_b=1/(2T)$,重做(j)。这些结果与(j)和(k)比较怎样? 为什么?

对于一个 PAM 系统,一种典型的接收机是用一个"匹配滤波器"判定是否这个接收到的脉冲是一个"0"或是一个"1"。匹配滤波器是这样一种滤波器,其单位冲激响应由 $h(t)=p(2T-t)$给出,其中引入 $2T$ 的延时是为了该滤波器成为因果的。匹配滤波器频率响应的幅

值和这个脉冲的频率相应幅值是完全一样的,所以它让这个脉冲通过,而阻掉在这个脉冲频带以外的任何加性噪声。具体地说,如果已接收到的信号 $r(t)$ 当中包含有一个脉冲 $p(t)$ 和噪声 $n(t)$,那么在匹配滤波器的输出端,信号 $w(t)=r(t)*p(2T-t)$ 就为

$$w(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[p(\tau)p(2T+\tau-t)+n(\tau)p(2T+\tau-t)]d\tau \tag{8.9}$$

若该匹配滤波器的输出在 $t=2T$ 采样,那么 $w(2T)$ 为

$$w(2T)=\int_{-\infty}^{\infty}[p(\tau)p(\tau)+n(\tau)p(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{8.10}$$

$$=E_p+\int_{-\infty}^{\infty}n(\tau)p(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.11}$$

式中 E_p 是脉冲 $p(t)$ 的能量。一般来说,在匹配滤波器的输出,相干被积脉冲的能量 E_p 总是显著要比不相干的被积噪声能量要大。

(m) 构成信号 y7,它对应 N=100 个在比特率 $f_b=1/T$ 随机选取的比特流。用键入 yn=y7+randn(size(y))*sigma 将高斯噪声加到这个要发送的信号 y7 上,这里 sigma=0.5 是该噪声的均方根(RMS)值。在脉冲的中心位置取信号 yn 的样本,并将结果存入向量 ahat 中。用

ahat=sign(yn(1:fb:length(xy)))

确定每一比特是“0”或是“1”。计算由这个检测策略产生的比特判决误码数。现在用一个匹配滤波器并在合适的时刻对该匹配滤波器的输出采样以确定比特估计值。比特误码数降低了吗?因 sigma=1 和 sigma=1.25 重复这个试验。

8.5 频率调制

虽然幅度调制和频率调制在实用中都用来传输信号,但是频率调制比幅度调制有几个显著的优点。首先,频率调制容许传输系统更加高效,也即系统工作在峰值功率状态。其次,在传输过程中,频率调制对于加性噪声的扰动更为鲁棒。你或许早已注意到,FM 无线电台通常比 AM 电台噪声要小。然而,这个超越的性能一般是以牺牲带宽为代价的。

对于正弦频率调制,要发送的消息信号用于改变一个正弦载波的频率。即,若 $x(t)$ 是要发送的消息信号,频率已调信号由下式给出:

$$y(t)=\cos\left(\omega_c t+\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{8.12}$$

式中 ω_c 称为载波频率。信号 $x(t)$ 是寄寓在已调信号 $y(t)$ 的瞬时频率中,这里瞬时频率 $\omega_i(t)$ 定义为 $\cos(\cdot)$ 宗量的导数,即

$$\omega_i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\omega_c t+\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{8.13}$$

$$=\omega_c+x(t) \tag{8.14}$$

在通信系统的接收端,消息信号 $x(t)$ 原则上可以完全从 $y(t)$ 中恢复。

虽然幅度调制是一种线性工作,但是注意到频率调制的工作——从消息信号 $x(t)$ 映射到已调信号 $y(t)$——却具有很高的非线性。由于这个非线性,分析频率调制系统要求比分析 AM 系统要用到更为复杂的数学工具。然而,对某些消息信号,你已经学过的时域和频域方法

能让你对频率调制获得深刻的理解。考虑如下两个消息信号:

$$x_1(t)=A\cos(\omega_m t) \tag{8.15}$$

$$x_2(t)=A\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(t-kT_m) \tag{8.16}$$

式中 $\omega_m=2\pi/T_m$ 是消息信号的频率,$g(t)$是信号

$$g(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<T_m/2\\ -1, & T_m/2\leqslant t<T_m\\ 0, & \text{其余 } t\end{cases} \tag{8.17}$$

信号 $x_2(t)$称为方波信号。本练习的余下部分都假定载波频率固定在 $\omega_c=2\pi$。

基本题

假设下面的题消息频率固定在 $\omega_m=\pi/8$,消息幅值固定在 $A=4$。

(a) 对这两个已调信号,确定在区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上瞬时频率的范围。

(b) 对于 T=16 和 dt=0.05,定义向量 t=[0:dt:T-dt]包含所关注的时间样本。将在 t 的时间样本上 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的值存入向量 x1 和 x2 中。

(c) 将在 t 的时间样本上的 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的频率调制样本存入向量 y1 和 y2 中。作为第一步,先导出(8.12)式中 cos(·)宗量的解析表达式。在同一坐标轴上画出 x1 和 y1 对 t 的图。对 x2 和 y2 同样这样做。

(d) 对两个消息信号 $x_1(t)$和 $x_2(t)$,确定频率调制信号 $y(t)$的周期。注意,T 是等于两个周期的整倍数。

(e) 用 fft 计算这两个频率已调信号中的每一个的连续时间傅里叶级数系数。在计算傅里叶级数系数中,假定 T 是两个信号的周期,即便 T 是 $y(t)$的周期的整倍数。用 T 取代真正的周期只是意味着要比需要表示这个信号的系数计算出更多的系数。执行 fft(y1)将产生在一个常数因子的范围内,在 $-N/2\leqslant k\leqslant N/2-1$ 内的傅里叶级数系数 a_k 的值,其中 N=T/dt 和 a_k 是在频率 $\omega_k=2\pi k/T$ 的复指数的系数。完成一张傅里叶级数系数的幅值对于频率样本 ω_k 的图。记住,你必须要用 fftshift 对由 fft 产生的向量重新排序。

(f) 证明在傅里叶级数系数中的能量是集中在以 $\omega=\pm\omega_c$ 为中心的区域。对每个已调信号,由(a)中所确定的瞬时频率的范围对预计傅里叶级数系数在载频周围分布有多好?

(g) 定义已调信号的带宽是以 $\pm\omega_c$ 为中心的频率间隔的宽度,在这里它包含了 $y(t)$中的大部分能量。你能预计到这两个已调信号的带宽是 A 的函数吗?是 ω_m 的函数吗?为什么。

中等题

对于(8.15)式的消息信号 $x_1(t)$,这个频率已调信号能展开为

$$y(t)=\cos(\omega_c t)\cos(m\sin(\omega_m t))-\sin(\omega_c t)\sin(m\sin(\omega_m t)) \tag{8.18}$$

式中 $m=A/\omega_m$ 称为调制指数。如果 m 比较小,那么 $\cos(m\sin(\omega_m t))\approx 1$ 和 $\sin(m\sin(\omega_m t))\approx m\sin(\omega_m t)$。将这些近似式代入(8.18)式就得到这个已调信号的窄带近似。应该注意,调制指数,从而窄带近似的准确性既与消息信号的幅度,又与消息信号的频率有关。

(b) 假设 $\omega_m=\pi/4$ 和 $A=0.2$。调制指数值为多少?概略画出 $y(t)$窄带近似的傅里叶变换。按照你的图,这个已调信号的带宽是什么?这里带宽按(g)中所定义。

(i) 将这个消息信号和已调信号在 t 的时间样本上求得的值存入向量 xx1 和 yy1 中，用(8.12)式，而不是窄带近似式计算 $y(t)$的值。在同一坐标轴上画出 xx1 和 yy1。

(j) 用 fft 计算这个已调信号的傅里叶级数系数，并用 stem 画出这些系数的幅值图。当计算傅里叶级数系数时再次用 T 作为这个信号的周期(因此也就是“积分”区间)，将频率轴作适当标注。这张图与由窄带近似所预计的傅里叶级数系数符合程度如何？从 ω_c 到傅里叶级数系数是非零的第一个频率样本的距离是什么？

(k) 对 $\omega_m=\pi/2$ 和 $A=0.2$ 重做(j)。调制指数 m 的值是什么？根据你的傅里叶级数系数的图，这个窄带近似式的准确程度如何？定义这个已调信号的带宽是从 ω_c 沿频率轴到 $|a_k|$ 是在 ω_c 的傅里叶级数系数幅值的 5% 以内的最后一个频率距离的两倍。这个带宽随 ω_m 的值从 $\pi/4$ 增加到 $\pi/2$ 而变化吗？有关用瞬时频率的范围作为一个频率已调信号带宽的度量意味着什么？

(l) 对 $\omega_m=\pi/4$ 和 $A=1$ 重做(j)。调制指数 m 是什么？非零傅里叶级数系数之间的距离随 A 值改变而变化吗？请说明。这些位置是 ω_m 的函数吗？

```
    1
>> ps = roots(a)
ps =
    -2
    -1
```

一个简单的零极点图可以用在复数 s 平面内，在每个极点的位置放一个'x'，在每个零点的位置放一个'o'来完成，也即

```
>> plot (real(zs), imag(zs), 'o');
>> hold on
>> plot (real(ps), imag(ps), 'x');
>> grid
>> axis [-3  3  -3  3]);
```

函数 grid 在图上画上坐标方格，而函数 axis 则在图中设置坐标轴的范围。

(a) 下列每个系统函数都对应于稳定的 LTI 系统。用 roots 求每个系统函数的零极点，并如上所示的利用 plot 给零极点图作适当标注。

(i) $H(s)=\dfrac{s+5}{s^2+2s+3}$

(ii) $H(s)=\dfrac{2s^2+5s+12}{s^2+2s+10}$

(iii) $H(s)=\dfrac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}$

若干不同的信号能有相同的拉普拉斯变换有理表达式，但有不同的收敛域。例如，具有单位冲激响应为

$$h_c(t)=e^{-\alpha t}u(t),\qquad h_{ac}(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$$

的因果和反因果 LTI 系统就有相同的分子和分母多项式的有理系统函数为

$$H_c(s)=\frac{1}{s+\alpha},\qquad \mathrm{Re}(s)>-\alpha$$

$$H_{ac}(s)=\frac{1}{s+\alpha},\qquad \mathrm{Re}(s)<-\alpha$$

然而，它们有不同的系统函数，因为它们有不同的收敛域。

(b) 对(a)中的每一个有理表达式，确定对应于稳定系统的收敛域 ROC。

(c) 对输入和输出满足下面微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-3y(t)=\frac{d^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+5x(t)$$

的因果 LTI 系统，求系统函数的零点和极点，并完成一幅适当标注的零极图。

中等题

本章的这些练需要用函数 pzplot，它含在 Computer Explorations Toolbox 中。为方便起

见,对于 pzplot 的 M 文件也在下面列出。函数 pzplot 是用于对分子和分母多项式的系数存入向量 b 和 a 中的 LTI 系统画零极图用的。这个函数除了画图以外,还产生零极点的值。任选宗量 ROC 用来在图中指出收敛域。在该系统的收敛域内用选取 ROC 是一个点,pzplot 将适当地给系统的收敛域标注。例如,试试执行下列命令:

```
≫ b=[1 -1];
≫ a=[1 3 1];
≫ [ps, zs]=pzplot(b, a, 1);
≫ [ps, zs]=pzplot(b, a, -2);
```

(d) 说明一下,pzplot 如何在 ROC 内由一个单一的点能确定一个有理变换的收敛域

```
function [ps, zs]=pzplot(b, a, ROC)
%   [ps, zs]=pzplot(b, a, ROC)
% Plots the pole-zero diagram for the LTI system with H(s)=b(s)/a(s)
%   Optional argument ROC defines one point in the ROC

ps=roots(a);  % determine poles
zs=roots(b);  %determine zeros
ps=ps(:);  % make into column vector
zs=zs(:);  % make into column vector

MaxI=max(abs(imag([ps; zs; j])));  % Determine size of diagram
MaxR=max(abs(real([ps; zs; i])));  %
plot(1.5*[-MaxR MaxR], [0 0], 'w')  % Plot the real axis
hold on
text(1.5*MaxR, 0, 'Re')
plot ([0 0], 1.5*[-MaxI MaxI], 'w')  % plot the imag axis
text(0, 1.5*MaxI, 'Im')
plot(real(zs), imag(zs), 'ro')  % Plot zeros
plot(real(ps), imag(ps), 'yx')  % Plot poles

if nargin? 2,                  % ROC optional
  if(any(real(ps)<ROC))  % Any poles to the left?
    lpole=max(real(ps(real(ps)<ROC)));
    plot([lpole lpole], 1.5*[-MaxI MaxI], 'w---')
  end
  if(any(real(ps)>ROC))  % Any poles to the right?
    rpole=min(real(ps(real(ps)>ROC)));
    plot([rpole rpole], 1.5*[-MaxI MaxI], 'w---' )
  end
  text(ROC, -1.25*MaxI, 'ROC')  % Label the ROC
```

```
end

axis('equal');                    % Make square aspect ratio
grid
hold off
```

9.2 二阶系统的极点位置

在这些题中，要对如下形式的二阶系统

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{9.4}$$

考查它的极点位置。阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_n 的值完全确定了这些极点的位置，因此也就确定了这个系统的特性行为。练习 6.1 曾研究了这个系统时域和频域特性之间的关系，这个练习要看看极点的位置是如何影响频率响应的。

基本题

在这些题中，将考查当 ω_n 保持为 1，对 4 种不同选择的 ζ 值时的频率响应和极点位置。

(a) 定义 $H_1(s)\sim H_4(s)$ 分别是 $\omega_n=1$，而 $\zeta=0,\ 1/4,\ 1$ 和 2 时，由(9.4)式确定的系统函数。定义向量 a1～a4 分别是 $H_1(s)\sim H_4(s)$ 分母多项式的系数向量。求出并画出每个系统极点的位置。

(b) 定义 omega=[-5:0.1:5]是这些频率，在这些频率上要计算这 4 个系统的频率响应。用 freqs 计算并画出在(a)中所定义的这 4 个系统的 $|H(j\omega)|$。对于 $\zeta<1$ 和 $\zeta\geqslant1$ 的频率响应定性来看是怎样的不同？你能解释系统的极点位置为何会导致这种差别吗？另外，从几何上你能论证为什么对所有这 4 种系统都有相同的 $|H(j\omega)|_{\omega=0}$ 值？

中等题

这些题将要画出当改变 ζ 和 ω_n 时极点位置的轨迹，并且看看这些参数的变化是如何影响系统的频率响应的。

(c) 首先保持 $\omega_n=1$，在 $0\leqslant\zeta\leqslant10$ 范围内改变 ζ。定义 zetarange=[0 logspace(-1, 1, 99)]以得到在 $0\leqslant\zeta\leqslant10$ 内 100 个按对数分开的点。定义 azeta 是一个 3×100 的矩阵，其中每一列是当 ζ 为 zetarange 中对应列的值时，$H(s)$ 分母多项式的系数。定义 zetapoles 是 2×100 的矩阵，其中每一列就是 azeta 对应列的根。在单独的图上，画出 zetapoles 每一行实部对于虚部的图，并叙述画出的轨迹。在你的图上指出下列各点：$\zeta=0,\ 1/4,\ 1$ 和 2。为了在你的图中得到具有等长度轴的平方纵横比，可以键入

```
>> axis('equal');
>> axis([-4  0 -2  2]);
```

定性叙述一下，当 ζ 从 0 改变到 1，然后又从 1 变到 10 时，你估计频率响应该如何变化。

(d) 这个题保持 $\zeta=1/4$ 而要考察将 ω_n 从 0 增加到 10 的效果。定义 omegarange=[0 logspace(-1, 1, 99)]是按对数分开的在所关心的区域内的 100 个点。用类似于在

(c)中定义 azeta 和 zetapoles 的方式定义 aomega 和 omegapoles。在一张单独的图上，对 omegapoles 的每一列画出实部对于虚部的图。你如何估计变化 ω_n 是怎样改变频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$的？利用 freqs 求当 $\omega_n=2$ 和 $\zeta=1/4$ 时的频率响应，并画出这个频率响应的幅值。将这个结果与(b)中对 $\omega_n=1$ 和 $\zeta=1/4$ 的图进行比较。它们有什么样的不同？这个与你从按 omegapoles 画出的轨迹图所估计的符合吗？

深入题

(e) 在(9.4)式中的 ζ 没有理由一定要是正的。对于位于 -10 和 0 之间的 ζ 重做(c)。当 ζ 是负的时，由 $H(s)$描述的系统能够既是因果又是稳定的吗？另外，用 freqs 画出 $\zeta=-1/4$ 和 $\omega_n=1$ 时该系统频率响应的幅值。具有由 freqs 计算出的频率响应的这个系统是因果的吗？另外，解释一下这个图与在(b)中对 $\zeta=1/4$ 画出的频率响应的幅值之间的任何异同点。

9.3 巴特沃兹滤波器

对于频率选择性滤波来说，巴特沃兹滤波器是广泛应用的一类连续时间 LTI 系统。它们在频率响应上的简单解析形式从工程的立场来说，使巴特沃兹滤波器最具吸引力。这个练习要用拉普拉斯变换在频域设计和分析这类滤波器。

一个 N 阶巴特沃兹低通滤波器其频率响应的幅值满足

$$|B(\mathrm{j}\omega)|^2=\frac{1}{1+(\mathrm{j}\omega/\mathrm{j}\omega_c)^{2N}} \tag{9.5}$$

对于一个具有实值单位冲激响应 $b(t)$的巴特沃兹滤波器，系统函数满足

$$B(s)B(-s)=\frac{1}{1+(s/\mathrm{j}\omega_c)^{2N}} \tag{9.6}$$

基本题

(a) 用解析方法确定 $B(s)B(-s)$的 $2N$ 个极点的位置。

(b) 应该注意到，如果在 $s=s_p$ 存在一个极点，那么在 $s=-s_p$ 也一定有一个极点。用解析方法确定一阶($N=1$)因果稳定的巴特沃兹滤波器的极点位置。根据给定的这个滤波器的极点位置，你仅能在一个幅度标量因子的范围内确定 $B(s)$。选择这个标量因子以使得该滤波器在 $s=0$ 的增益为 1，即 $B(0)=1$。

(c) 对 $\omega_c=10\pi$ 和 $N=1$，利用 freqs 计算在 w=linspace(0, 1000)频率上由(b)得出的这个一阶巴特沃兹滤波器的频率响应。在这些频率点上画出适当标注的频率响应的幅值图。

(d) 对 $N=3$，确定 $B(s)B(-s)$的 6 个极点的位置，并将它们存入向量 sp 中。在复数 s 平面上，在每个极点位置上放上一个'x'画出全部 6 个极点。你可以用 9.1 节讨论的 pzplot 来做。

(e) 将对应于因果和稳定的巴特沃兹滤波器的 3 个极点存入向量 csp 中。已知这 3 个极点的位置，该滤波器系统函数的分母多项就应具有 $D(s)=(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)$。利用函数 poly 从 csp 中构造 $B(s)$多项式系数向量 a。什么是 $B(s)$的分子多项式以使得该低通滤

了在某一s平面的区域内计算出 $H_1(s)$，首先就必须定义一个矩阵，其中包括了你想要求 $H_1(s)$ 的全部 s。s 的复数值可以用 $\sigma+j\omega$ 表示，ω 的值还是在(b)中由 omega 所定义的那些，而对于 σ，可定义 sigma = -1+(1/8)*(1:32) 得到在 $-1<\sigma\leqslant 3$ 内的 32 个样本。现在你就能用 meshgrid 按如下命令定义 s 的值：

```
>> [sigmagrid, omegagrid] = meshgrid(sigma, omega);
>> sgrid = sigmagrid + j * omegagrid;
```

矩阵 sgrid 中包含了对区域 $-1<\sigma\leqslant 3$，$-10\leqslant\omega\leqslant 10$ 的采样。然后你就能在 sgrid 的每一点上求 $H_1(s)$，并用键入

```
>> H1 = polyval(b1, sgrid). /polyval(a1, sgrid);
>> mash(sigma, omega, abs(H1));
```

画出由 $|H_1(s)|$ 所定义的曲面。你还能用 view 命令旋转这个曲面，并从任何角度观察它。有缺陷的观察点是在仰角 30°和方位角 -37.5°处。键入 view([-80 30]) 刚好就从 Re(s) = -1 这条线的后面看这个曲面，而键入 view([0 30]) 就沿着 jω 轴看这条直线。从几个不同的角度考察这个曲面，你可以发现，将集中沿 jω 轴观察这个曲面的轮廓线，极点如何影响频率响应将更为直观形象。你可以用键入以下命令来做

```
>> hold on;
>> plot3(zeros(1, 41), omega, abs(H1(:, 8)) + 0.05, 'c')
>> hold off;
```

这里 0.05 的偏置是必要的，以保证你画的这条线刚好在曲线上面可以看得见。

(d) 考虑另一个不同的系统函数

$$H_2(s)=\frac{4}{s^2+s+16.25}\quad,\qquad \mathrm{Re}(s)>-\frac{1}{2} \tag{9.8}$$

用 pzplot 求出并画出这个系统函数的极点图。根据你的零极点图和在(c)所画出的曲面，你如何估计 $|H_2(j\omega)|$ 不同于 $|H_1(j\omega)|$？定义 H2 是新系统用 freqs 求出的频率响应，画出这个频率响应的幅值以证实你的答案。

中等题

这些题将考察在系统函数上添加零点在频率响应上带来的影响；另外，还将研究在一个不同的s平面域中的系统函数。

(e) 考虑系统函数

$$H_3(s)=\frac{0.25(s^2+1)}{s^2+2s+17}\quad,\qquad \mathrm{Re}(s)>-1 \tag{9.9}$$

对该系统函数产生一张零极点图。依据这个零极点图，指出你如何估计 $|H_3(j\omega)|$ 不同于 $|H_1(j\omega)|$，并大致画出 $|H_3(j\omega)|$。用 freqs 验证你的图。利用(c)中的技术在 sgrid 的 s 平面部分产生 $|H_3(j\omega)|$ 的一幅 mesh 图。将这个曲面与在(c)中你已求得的曲面比较，零点的引入怎样影响拉普拉斯变换的？

(f) 定义 s2grid = sgrid - 2 是为了求得在 $-3<\sigma\leqslant 1$，$-10\leqslant\omega\leqslant 10$ 区域内的采样。在这个新的区域上，对(a)中 $H_1(s)$ 的有理表达式求值，并将结果存入 newH1 中。画出由 newH1 幅值给出的曲面。应该注意，你必须要调整 mesh 中的 sigma 常量以反映这个位移了的实

基本题

利用 lsim 计算满足(9.11)式的反因果 LTI 系统的响应需要分几步来做。第一步是找一个因果系统,其单位冲激响应 $h_c(t)$是所要求的反因果系统单位冲激响应 $h_{ac}(t)$的时间倒置,即 $h_c(t)=h_{ac}(-t)$。这个因果系统能用 lsim 仿真。在(9.11)式中以 $-t$ 替换 t 可以导得这个因果系统的微分方程为

$$\sum_{k=0}^{K}(-1)^k a_k \frac{d^k y(-t)}{dt^k} = \sum_{m=0}^{M}(-1)^m b_m \frac{d^m x(-t)}{dt^m} \tag{9.12}$$

这个系统的输入是 $r(t)=x(-t)$,输出是 $w(t)=y(-t)$。这个因果系统的辅助条件是初始松驰。第二步是对反因果系统的输入 $x(t)$取时间倒置而求得该因果系统的输入 $r(t)$。第三步是要用 lsim 仿真当输入是 $r(t)$时,满足(9.12)式的因果 LTI 系统的响应 $w(t)$。最后一步是将已仿真出的响应 $w(t)$取时间倒置以得出原反因果系统的输出 $y(t)$。这些步骤都在下面习题中完成。

(a) 如果 $H_{ac}(s)$是与(9.12)式有关的系统函数,$H_c(s)$是与(9.11)式有关的系统函数,这两个系统函数的极点存在什么关系? $H_c(s)$与 $H_{ac}(s)$是什么关系?

对于下面的题,将考虑微分方程是

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{9.13}$$

(b) 求与(9.13)式有关的系统函数 $H(s)$和全部可能的 $H(s)$收敛域,对每一种收敛域,确定相应 LTI 系统的单位冲激响应。

(c) 对(b)中的每一种收敛域,对应的微分方程的辅助条件是什么?

(d) 定义 a 和 b 包含了 $H(s)$分母和分子多项式的系数。对于具有系统函数为 $H(s)$的因果系统,用 impulse 证实单位冲激响应的解析表达式。将由 impulse 产生的在时间样本 t=[-5:0.01:5]上的单位冲激响应的值存入向量 h 中。画出 h 对 t 的图。应该注意,因为 hs = impulse(b, a, ts)产生的是对 $\delta(t-\text{ts}(1))$响应的样本,所以你将不得不对 impulse 的输入选择适当的时间样本,并且要将结果补上适当个数的零。

(e) 对反因果系统重做(d)。记住,impulse(b, a, ts)是假设在 a 和 b 中的系数对应于一个因果系统。你需要对一个时间倒置的系统(见(9.12)式)定义一组新的系数,然后将由 impulse 计算出的单位冲激响应适当地翻转(因为(9.12)式的输出是已时间倒置的)。

(f) 用解析方法计算当输入 $x(t)=e^{5t/2}u(-t)$时,满足(9.13)式的反因果 LTI 系统的输出。

(g) 用 lsim 验证在(f)中导得的反因果系统在时间样本 t 上的输出。和 impulse 一样,函数 lsim(b, a, x, ts)也是假设向量 a 和 b 对应于一个因果系统,所以你必须用时间倒置的微分方程来做。这个微分方程的系数应该在(e)中已计算出。注意,时间倒置系统的输入也必须是时间倒置的,即 $r(t)=x(-t)$。

中等题

现在考虑三阶微分方程

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 24\frac{dy(t)}{dt} - 26y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 7\frac{dx(t)}{dt} + 21x(t) \tag{9.14}$$

(h) 求与(9.14)式有关的系统函数 $H(s)$，并按9.1节画出这个系统函数的零极点图。确定全部可能的收敛域。对于哪一个收敛域该系统是稳定的？

(i) 用 residue 确定 $H(s)$ 的部分分式展开。对由(h)所确定的每个收敛域，用解析方法确定有关的单位冲激响应。

(j) 对满足(9.14)式的因果系统，用 impulse 验证由(i)计算出的相应的单位冲激响应，时间样本用向量 t。与这个因果系统有关的 $y(t)$ 上的辅助条件是什么？

(k) 对满足(9.14)式的反因果系统，用 impulse 验证由(i)计算出的相应的单位冲激响应，时间样本用向量 t。记住，你必须首先确定这个时间倒置的微分方程的系数，然后从这个时间倒置方程的因果单位冲激响应中导出(9.14)式这个反因果的单位冲激响应。与这个反因果系统有关的 $y(t)$ 上的辅助条件是什么？

深入题

下面的这些题要考虑输入和输出满足(9.14)式的稳定 LTI 系统的数值实现。按照在(i)中所计算的，这个系统的单位冲激响应 $h_s(t)$ 应该对全部 t 都是非零。这个系统称为非因果的，因为它既不是因果的，也不是反因果的；并且一种简单的微分方程的时间倒置将不足以来实现它。代之的是将微分方程分解为一个因果和一个反因果的分量，每个分量都单独分开计算。这就称之为系统的并行实现。

(l) 并行实现一个 LTI 系统是很容易这样来看的：将系统函数 $H(s)$ 分解为 $H(s)=H_1(s)+H_2(s)$，以使得系统输出 $y(t)$ 能分别由计算对 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 的响应而计算出来。注意，$H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 的收敛域必须恰当标定。已知在(i)中求得的 $H(s)$ 的部分分式展开，对这个稳定系统确定 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$，以使得 $h_1(t)$ 是因果的，$h_2(t)$ 是反因果的。确信所标出的 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 的收敛域是正确的。

(m) 求 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 的逆变换 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$。由 $h_s(t)$ 的表达式你应该能够确定这些单位冲激响应。

(n) 定义 $y_1(t)$ 是由 $H_1(s)$ 及其收敛域所确定的系统输出，与在 $y_1(t)$ 上应加的辅助条件一起给出对应于 $H_1(s)$ 的微分方程。

(o) 定义 $y_2(t)$ 是由 $H_2(s)$ 及其收敛域所确定的系统输出，与在 $y_2(t)$ 上应加的辅助条件一起给出对应于 $H_2(s)$ 的微分方程。

(p) 利用 lsim 确定该稳定系统对输入

$$x(t)=\begin{cases}1, & -3\leqslant t\leqslant 2\\ 0, & \text{其余 } t\end{cases} \tag{9.15}$$

在区间 $-10\leqslant t\leqslant 10$ 内的时间样本 t=[-10:0.01:10]上的响应。

在区间 $-10\leqslant t\leqslant 10$ 内画出 $y_1(t)$，$y_2(t)$ 和 $y_3(t)$。

第 10 章

z 变换

离散时间信号 $x[n]$的双边 z 变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{10.1}$$

是离散时间傅里叶变换的推广,而离散时间傅里叶变换在研究离散时间信号与系统中是很有用的。注意到对 $z=e^{j\omega}$,z 变换就演变成离散时间傅里叶变换。然而,存在双边 z 变换的信号要比存在离散时间傅里叶变换的信号范围广得多,并且双边 z 变换对理解稳定和不稳定系统都是有用的。对于一大类信号来说,z 变换能表示成以 z 为变量的两个多项式之比,即

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)} \tag{10.2}$$

这些变换称为有理变换,而且在作为满足线性常系数差分方程的 LTI 系统的系统函数中常常遇到。$N(z)$和 $D(z)$根的位置分别称为该系统的零点和极点,除了一个常数因子外,它们决定了具有有理变换的 LTI 系统的特性行为。因此,能够用这些极点和零点位置的图来分析系统性质。

10.1 节说明如何产生一幅具有有理系统函数的系统的零极点图。练习 10.2 研究零极点的位置如何影响一个系统的频率响应。对滤波器系数的量化在系统零极点位置上的影响,从而在系统特性行为上的影响将在 10.3 节考察。用模仿连续时间滤波器设计,或者将连续时间滤波器转换为离散时间滤波器的离散时间滤波器的设计是一种常见的信号处理应用,练习 10.4 将介绍一种称之为欧拉近似的变换法,而在练习 10.5 将介绍称之为双线性变换的另一种方法。

提醒注意,整个这一章都用 Ω 记作连续时间频率变量,而 ω 用来代表离散时间频率变量。这个约定应该有助于减少在练习中所讨论的两个域中的混淆。

10.1 作离散时间零极图

这一节将要学习如何将一个离散时间有理系统函数 $H(z)$的零极点展现一张零极点图。有理系统函数的零极点可以用 roots 计算出来,这与 9.1 节介绍的一样。函数 roots 要求系数向量是以自变量的递降次序设定的。例如,考虑系统函数为

$$H(z)=\frac{z^2-z}{z^2+3z+2} \tag{10.3}$$

的 LTI 系统,执行以下命令就能计算出它的零极点:

```
≫ b=[1   -1   0];
≫ a=[1 3 2];
≫ zs=roots(b)
zs=
    0
    1
≫ ps=roots(a)
ps
    -2
    -1
```

常常希望将离散时间系统函数写成用 z^{-1}的升阶次序。这些多项式的系数是很容易由线性常系数差分方程得到的，并且也是 filter 或 freqz 要求的形式。然而，如果分子和分母多项式具有不同阶次，那么在 $z=0$ 的零点或极点有可能被漏掉。例如，(10.3)式可以重新写作

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} \tag{10.4}$$

如果你是要从(10.4)式得到这些系数，就会得出下列结果：

```
≫ b=[1 -1]
≫ [1 3 2];
≫ zs=roots(b)
zs=
    1
≫ ps=roots(a)
ps=
    -2
    -1
```

应该注意，在 $z=0$ 的零点这里没有出现。当用 z^{-1}的形式表示一个系统函数时，为了求得完全的零极点集合，就必须要对这个较低降次多项式的系数向量补上零以使向量具有相同的长度。

本章的这些练习需要用到这个 M 文件 dpzplot.m，它是位于 Computer Explorations Toolbox 中。为了方便起见，这个 M 文件也在下面列出来了。函数 dpzplot(b, a)画出离散时间系统的零极点。dpzplot 的输入和 filter 具有相同的格式，并且如果分子和分母多项式不是同阶次的话，dpzplot 将自动地对 a 或对 b 补上适当个数的零。同时，dpzplot 在图中还包括单位圆，以及如果在单位圆内有多于一个零点或极点的话，还指出极点或零点的数目。

(a) 用 dpzplot 画出(10.3)或 $H(z)$的零极点图。

(b) 用 dpzplot 画出满足差分方程 $y[n]+y[n-1]+0.5y[n-2]=x[n]$的滤波器的零极点图。

(c) 用 dpzplot 画出满足差分方程

$$y[n] - 1.25y[n-1] + 0.75y[n-2] - 0.125y[n-3] = x[n] + 0.5x[n-1]$$

的滤波器的零极点图。

```
function dpzplot (b, a)
%   dpzplot (b, a)
%   Plots the pole-zero diagram for the discrete-time system function
% H(z)=b(z)/a(z) defined by numerator and denominator polynomials b and a.

la=length(a);
lb=length(b);
if  (la>lb),
  b=[b zeros(l, la-lb)];
elseif  (lb>la),
  a=[a zeros(1, lb-la)];
end
ps=roots(a);
zs=roots(b);
mx=max(abs([ps' zs' .95]))+ .05;
clg
axis ([-mx mx  -mx mx]);
axis ('equal');
hold on
w=[0:.01:2*pi];
plot(cos(w), sin(w), '.');
plot([-mx  mx], [0  0]);
plot([0  0], [-mx  mx]);
text(0.1, 1.1, 'Im', 'sc');
text(1.1, .1, 'Re', 'sc');
plot(real(ps), imag(ps), 'x');
plot(real(zs), imag(zs), 'o');
numz=sum(abs(zs)==0);
nump=sum(abs(ps)==0);
if numz>1,
  text(-.1, -.1, num2str(numz));
elseif nump>1,
  text(-.1, -.1, num2str(nump));
end
hold off;
```

10.2 离散时间频率响应的几何解释

这个练习要说明如何从系统函数零点和极点位置的几何考虑,计算离散时间系统频率响

tors1 中每一元素的幅值和相位。

(c) 类似于 polevectors1 定义 zerovectors1,使得它是 2×512 的矩阵,其中包含从零点位置到 unitcirc 元素的向量。定义 zerolength1 和 zeroangle1 分别是这些向量的幅值和相位。

(d) 画出 polelength1 和 zerolength1 对于 omega 的图。根据这些图,你预计 $|H_1(e^{j\omega})|$ 在哪里有最大值和最小值?

(e) 用 polelength1 和 zerolength1 计算 $|H_1(e^{j\omega})|$,并将这个结果存入 geonH1mag 中。用 poleangle1 和 zeroangle1 计算 $\angle H_1(e^{j\omega})$,并将结果存入 geomH1phase 中。在定义 geomH1mag 和 gemH1phase 时,你或许发现 prod 和 sum 是很有用的。画出从几何上导出的幅值和相位,并将它们与经由下面计算所得结果比较:

```
>> H1 = freqz(b1, a1, 512, 'whole');
```

你在(d)中所估计的峰值频率正确吗?

中等题

下面这些题的第一组将考查移动 $H_1(z)$中一个零点的效果。具体说来,考虑系统函数为

$$H_2(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}, \quad |z|>0.9 \tag{10.9}$$

(f) 求出并画出 $H_2(z)$的零极点图。你怎样预计这个系统的 polevectors2 或者 zerovectors2 与 $H_1(z)$的有什么不同吗?

(g) 计算 $H_2(z)$的 polevectors2 和 zerovectors2 以及所有这些向量的幅值和相位。画出幅值和相位对 omega 的图。你在(f)中的预计正确吗?

(h) 根据这些零点的变化,预计 $H_2(e^{j\omega})$与 $H_1(e^{j\omega})$将会有怎样的不同。用 freqz 计算 H2 验证你的答案。

以下的题将考虑系统函数为

$$H_3(z) = \frac{0.25-(\sqrt{3}/2)z^{-1}+z^{-2}}{1-(\sqrt{3}/2)z^{-1}+0.25z^{-2}}, \quad |z|>0.5 \tag{10.10}$$

(i) 求出并画出 $H_3(z)$的零极点图。这些零点和极点的位置是如何相关联的?

(j) 类似于你在**基本题**中所做的方式定义 polevectors3 和 zerovectors3。定义 polelength3 和 zerolength3 是这些复数的幅值。在同一组坐标轴上画出所有这些幅值,也就是 polelength3 和 zerolength3 每一行的幅值。这些幅值有什么关系?根据这一点,你如何预计频率响应的幅值 $|H_3(e^{j\omega})|$随频率改变?利用这些长度计算频率响应幅值,并将它存入 geomH3mag 中。画出 geomH3mag 对于 omega 的图。

(k) 利用 freqz 计算 H3,并验证你在(j)中的答案。

10.3 离散时间滤波器结构的量化效应

函数 ellip 既能用于设计离散时间椭圆滤波器,也能用于设计连续时间椭圆滤波器。椭圆型频率选择性滤波器有一个等波纹的频率响应幅值,也即在通带内频率响应幅值在 $1\pm\delta_1$ 之间起伏,而在阻带内在 $\pm\delta_2$ 之间起伏。这一组题将要学习由调用

```
>>[b, a] = ellip(4,.2, 40, [.41 .47]);
```

产生的 8 阶椭圆滤波器的不同实现是如何受系数量化的影响的。这个滤波器在通带 $0.41\pi \leqslant |\omega| \leqslant 0.47\pi$ 内有 0.2 dB 的波纹,在阻带内有 40 dB 的衰减。当离散时间滤波器是用量化系数实现时,所得到的系统称为数字滤波器。数字滤波器一般是采用定点算术运算在整块数字信号处理(DSP)芯片上实现的。数字滤波器的系数必须量化到在 DSP 芯片上可以获得的比特数上。这个练将会观察到对于示于图 10.2 中的不同滤波器实现中,系数量化在频率响应上的影响。具体说,要考虑 3 种不同的实现:转置直接型(又称正准型),用二阶直接型的级联和用二阶直接型的并联联结。

基本题

(a) 将上面给出的 8 阶椭圆带通滤波器的系数存入向量 b 和 a 中。用[H, w] = freqz(b, a, 4 096)计算该滤波器在 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内频率响应的 4 096 个样本。用执行

```
≫ plot(w/pi, 20 * log10(abs(H)));
≫ axis([0 1 -80 10]);
```

画出 H 对于 w/pi 以分贝(dB)计的对数幅值图。

(b) 利用 axis 放大该滤波器的通带特性,并证实在通带内确是等波纹的。应该注意,由 ellip 得到的滤波器已被标尺化了,以使得通带起伏是在 1 和 $1-2\delta_1$ 之间。你如何能改变滤波器的系数使频率响应在通带内在 $1 \pm \Delta_1$ 之间起伏,而在阻带仍然保持等波纹? $\Delta_1 = \delta_1$ 吗? 对于下面的题,要用由 b 和 a 的系数给出的原滤波器。

(c) 用 filter 计算该滤波器单位冲激响应的 4 096 个样本,并将结果存入向量 h 中。画出单位冲激响应的最前面 200 个样本。单位冲激响应上的什么特点表明这是一个带通滤波器?

函数 y=filter(b, a, x)用一种直接型结构(确切地说就是转置直接Ⅱ型结构)实现由差分方程

```
y(n)=b(1)*x(n)+b(2)*x(n-1)+…+b(nb+1)*X(n-nb)
                  -a(2)*y(n-1)-…-a(na+1)*y(n-na)
```

表示的因果 LTI 系统,其中 a(1)=1, 而 na+1 和 nb+1 分别是向量 a 和 b 的长度。然而,当差分方程是用硬件实现时,直接型对系统量化是敏感的。函数 quant(x, N, M)是在 Computer Explorations Toolbox 中。这里也将它列出,它将向量 x 中的系数量化到 N 位比特,而 M 是每个元素的最大可能幅度。下面的习题将考察直接型结构对系数量化的灵敏度。

```
    function qc=quant(x, N, M)
%QUANT   Q=QUANT(x, N, M) quantizes the values of x(n) into
%        2^N values. The argument M is the value of
%        the maximum amplitude of x(n).

[mm, nn]=size(x);
qc=zeros(mm, nn);
levels=2^(N-1);
maxlevel=2^N-1;

for k=1:mm,
```

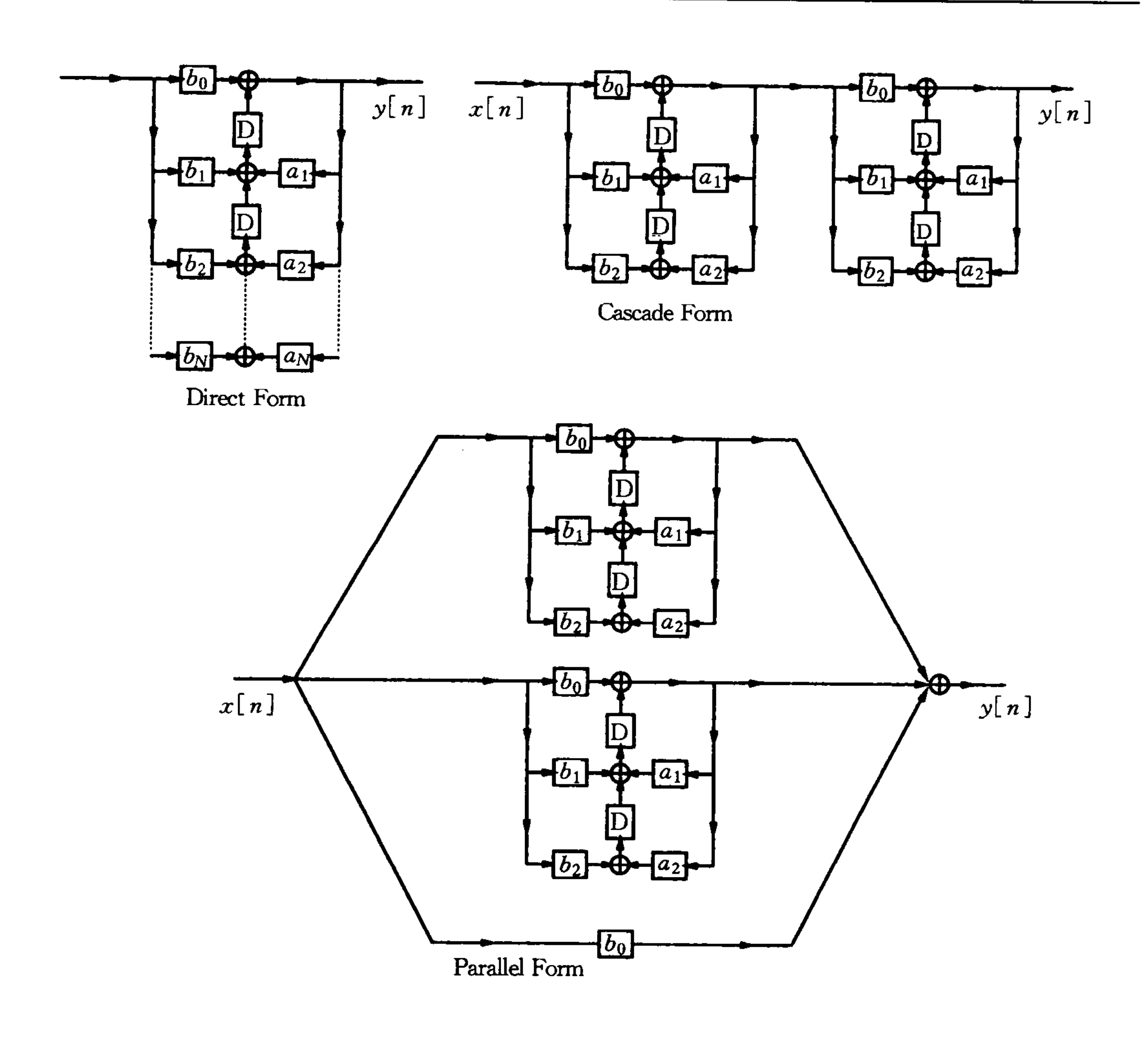


图 10.2　实现离散时间滤波器的三种不同结构

```
    tmp=fix((x(k, :)+M)  ./  (M/levels))
    q=zeros(1, nn);
    q(tmp <= maxlevel) = tmp (tmp <=maxlevel);;
    q(tmp > maxlevel) = maxlevel * ones (l, length(tmp (tmp > maxlevel)));
    q(tmp < 0) = zeros(tmp(tmp < 0));
    q = (q-levels) * M/levels;
    qc(k, :)=q;
end
```

(d) 置 M=max(abs([b a]))并用 quant 对 b 和 a 中的系数量化到 16 位比特，将结果存入 a16 和 b16。由量化所引起系数变化的最大值是什么？用 freqz 按(a)的办法画出该量化滤波器频率响应的幅值，并按(b)的办法放大通带内的波纹。

(e) 用函数 dpzplot 产生由系数 a16 和 b16 描述的滤波器的零极点图。

深入题

这一组题将考虑用二阶节组合的滤波器的并联实现,并将这种实现的系数量化灵敏度与级联型和直接型实现进行比较。

(m) 利用函数[R, P, K] = residue(b, a)将系统函数分解为它的部分分式展开式。记住,在以z^{-1}的多项式上用 residue 要求滤波器的系数是以按 filter 要求的相反次序按排的,这已在练习 5.6 中讨论过。为了用二阶节的并联联结实现这个滤波器,你需要从部分分式展开中将一阶节的配对组合成二阶节。为了简化计算,每个复数极点都应该与它的复数共轭组合在一起,使得所有的二阶节都有实值系数。挑选一阶项的 4 对,并用 residue 将这些一阶项重新组合成二阶节。如果在部分分式展开式中有任何对应于单位冲激响应中$K\delta[n]$形式一项的 K 项,务必在调用 residue 的一次中要包括 K。将所得到的二阶节系数存入矩阵 bp 和 ap 中,其中每一行都对应于一个二阶节系统。

(n) 利用重复调用 filter 实现该并联系统,并产生该系统单位冲激响应的 4 096 个样本点,将结果存入 hp。画出 hp 中前面 200 个样本,并将这个结果与 h 的图比较以证实你已经正确地实现了这个滤波器。若是这样,那么 max(hp - h)应该大致在 2e - 13 的量级。

(o) 用 quant 对 bp 和 ap 系数量化到 16 位比特,并将结果存入 bpq16 和 apq16。在 bpq16 和 apq16 的每一列上的利用 residue 得到以并联型量化该滤波器的部分分式展开。现在再用一次调用 residue 将这些项重组以得到对整个系统函数单一的一组系数 bp16 和 ap16。应当注意,虽然这个系统函数是由单一的差分方程给出的,但是这些系数是在并联型系统中量化过的。

(p) 用重复调用 filter 对该量化的并联型滤波器进行仿真,并产生它的单位冲激响应的 4 096 个样本点,将这个结果存入 hp16。用[H,w] = freqz(hp16, 1, 4 096)产生以 dB 计的频率响应的幅值图。也用 freqz(bp16, ap16, 4096)产生频率响应的幅值图,以证实由 bp16 和 ap16 描述的系统函数确实和量化并联型系统的系统函数是相同的。

(q) 用 dpzplot 作由 bp16 和 ap16 描述的滤波器的零极点图。这个滤波器既是因果的又是稳定的吗?这个 16 位比特量化的并联型滤波器的幅值响应与 16 位比特量化的级联型与直接型实现的幅值响应相比怎样?

(r) 将 bp 和 ap 系数量化到 12 位比特,重做(o)~(q)。

10.4 用欧拉近似法设计离散时间滤波器

基于一个连续时间滤波器来设计一个离散时间滤波器往往是想追求的。对于一个由微分方程描述的连续时间滤波器,可以将连续时间系统变换到代表一个离散时间滤波器的差分方程。理想地看,总希望这一变换保留住该系统频率响应的一般特性。将微分方程变换为差分方程的两种方法都是欧拉近似法,有时称为后向差分与前向差分。这些近似法都是利用导数的极限定义,将微分方程中的导数用有限差分来代替。具体地说,后向欧拉近似或后向差分就是利用定义

$$\frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{x_c(t) - x_c(t-\Delta t)}{\Delta t} \tag{10.11}$$

如果你定义 $x[n]=x_c(n\Delta t)$，那么按下面代换

$$\frac{x_c(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{映射到}} \frac{x[n]-x[n-1]}{\Delta t} \tag{10.12}$$

对某个足够小的 Δt 值，就能将微分方程转换为差分方程。由于在时域中微分就相当于在连续时间频域中乘以 s，因此，在离散时间频域中，一定也存在一种类似的从后向欧拉近似映射为乘以一个函数 $b(z)$ 的关系：

$$\frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\mathscr{L}} sX_c(s) \tag{10.13a}$$

$$\frac{x[n]-x[n-1]}{\Delta t} \xrightarrow{\mathscr{Z}} b(z)X(z) \tag{10.13b}$$

类似地，前向欧拉近似或前向差分利用下面导数的极限定义

$$\frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_c(t)+\Delta t)-x_c}{\Delta t} \tag{10.14}$$

以得到这种代换

$$\frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{映射到}} \frac{x[n+1]-x[n]}{\Delta t} \tag{10.15}$$

这种代换产生 z 变换映射为

$$\frac{x[n+1]-x[n]}{\Delta t} \xrightarrow{\mathscr{Z}} f(z)X(z) \tag{10.16}$$

这个练习将利用前向和后向差分近似研究将连续时间巴特沃兹低通和带通滤波器转换为离散时间滤波器的效果。

基本题

对于这组题，将用由下面微分方程描述的连续时间低通巴特沃兹滤波器进行作业：

$$\frac{\mathrm{d}^3y_c(t)}{\mathrm{d}t^3}+\frac{\mathrm{d}^2y_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y_c(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{8}y_c(t)=\frac{1}{8}x_c(t) \tag{10.17}$$

(a) 用解析方法求(10.17)式滤波器的系统函数 $H_{1p}(s)$。定义 a1p 和 b1p 分别是该系统函数分母和分子多项式的系数。用 freqs 求出并画出沿频率轴在 w=[-10:0.25:10]的频率上该连续时间滤波器的频率响应幅值。再按 9.1 节介绍的方法画出该系统函数 $H_{1p}(s)$ 的零极点图。

(b) 在微分方程中用差分代换导数就相当于在系统函数 $H_c(s)$ 的每个 s 用一个 z 的函数来代替。对于(10.12)式的后向欧拉近似，由(10.13)式，这个函数就是 $b(z)$。用(10.12)式和(10.13)式以及 $X_c(b(z))=X(z)$ 解出 $b(z)$，那么用后向欧拉近似所得出的离散时间系统就为 $H_b(z)=H_c(b(z))$。类似地，对于(10.15)式的前向欧拉近似，这个函数是 $f(z)$。利用拉普拉斯变换和 z 变换性质用解析方法导出 $f(z)$，以使得 $H_f(z)=H_c(f(z))$

(c) 用在(b)中求得的表达式与系统函数 $H_{1p}(s)$ 一起，用解析方法导出后向和前向差分在 $\Delta t=1/2$ 时的 $H_{b1p}(z)$ 和 $H_{f1p}(z)$。用 freqz 加上任选项'whole'在单位圆上画出1 024个等分点上的两个系统函数频率响应的幅值图。哪一种近似法在离散时间频率响应上是更加近似于原连续时间低通巴特沃兹滤波器？这个离散时间滤波器在高频的衰减和 $H_{1p}(s)$ 一样吗？

10.5 用双线性变换的离散时间巴特沃兹滤波器设计

这个练习要研究利用双线性变换从连续时间滤波器设计离散时间滤波器。双线性变换是一种映射，它能由一个有理的拉普拉斯变换 $H_c(s)$ 得到一个有理的 z 变换 $H_d(z)$。这种映射有一些重要的性质，其中包括：

(1) 如果 $H_c(s)$ 是因果稳定连续时间系统的系统函数，那么 $H_d(z)$ 就是因果稳定离散时间系统的系统函数。

(2) 如果 $H_c(j\Omega)$ 是一种分段恒定的频率响应，那么 $H_d(e^{j\omega})$ 也一定是分段恒定的。

这两个性质结合在一起就意味着：因果稳定的理想频率选择性滤波器 $H_c(s)$ 一定映射为因果稳定的理想频率选择性滤波器 $H_d(z)$。$H_c(s)$ 的双线性变换由下式给出：

$$H_d(z) = H_c(s), \qquad 其中 \quad s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{10.20}$$

对频率响应，映射关系为

$$H_d(e^{j\omega}) = H_c(j\Omega)\big|_{\Omega = \tan(\omega/2)} \tag{10.21}$$

基本题

这一组题要用解析方法用双线性变换设计一个离散时间低通巴特沃兹滤波器。这个离散时间滤波器必须满足下列指标要求：

- 通带频率 $\omega_p = 0.22\pi$;
- 阻带频率 $\omega_s = 0.4\pi$;
- 通带容差 $\delta_1 = 0.3$;
- 阻带容差 $\delta_2 = 0.25$。

这就意味着

$$1 - \delta_1 \leqslant |H_d(e^{j\omega})| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_p \tag{10.22}$$

$$|H_d(e^{j\omega})| \leqslant \delta_2, \qquad \omega_s \leqslant |\omega| \leqslant \pi \tag{10.23}$$

一个 N 阶连续时间巴特沃兹低通滤波器有一个频率响应，其幅值特性满足

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}} \tag{10.24}$$

对于一个具有实值单位冲激响应 $b(t)$ 的巴特沃兹滤波器，它的系统函数满足

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}} \tag{10.25}$$

有关连续时间巴特沃兹滤波器的更多内容可参见练习 9.3。你将用的设计方法是：

- 利用双线性变换将离散时间滤波器的特性指标映射为连续时间滤波器的特性指标。
- 设计一个连续时间巴特沃兹滤波器满足或超过这些指标要求。
- 利用双线性变换将这个连续时间滤波器映射回到离散时间。

以下的习题引导你从头到尾通过这个设计过程。

(a) 利用(10.21)式，将折转频率 ω_p 和 ω_s 映射到连续时间的折转频率 Ω_p 和 Ω_s。

(b) 用(10.22)式～(10.24)式求出满足这个指标要求的整数滤波器的阶 N 和截止频率 Ω_c。

你肯定愿意求一个能满足这些要求的最低阶 N,因为较低阶次的滤波器总是容易实现且价廉。同时求出该滤波器的系统函数 $H_c(s)$。

(c) 用函数 pzplot 画出该连续时间滤波器的零极点图,再用 freqs 画出频率响应的幅值图。务必检验一下通带和阻带边缘,以证实你的滤波器满足或超过连续时间滤波器的要求。

(d) 利用双线性变换(10.20)式将这个连续时间系统函数 $H_c(s)$映射为一个离散时间系统函数 $H_d(z)$,并将所得到的分子和分母多项式系数分别存入向量 a 和 b。用 freqz 画出频率响应的幅值,以证实你的滤波器满足原离散时间的指标要求。

(e) 用函数 dpzplot 画出该离散时间滤波器的零极点图,并证实这个因果稳定的连续时间滤波器映射为一个因果稳定的离散时间滤波器。

中等题

函数 butter 取两个常量 N 和 ω_c,然后设计一个 N 阶离散时间低通滤波器,其频率响应幅值满足

$$|H_d(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\tan(\omega/2)}{\tan(\omega_c/2)}\right)^{2N}}$$

这个函数 butter 用双线性变换从连续时间滤波器设计离散时间滤波器是采用下面算法:

- 将离散时间截止频率 ω_c 预畸变到对应的连续时间截止频率 Ω_c 上。
- 设计一个具有截止频率 Ω_c 的 N 阶连续时间巴特沃兹滤波器。
- 做双线性变换并产生离散时间滤波器系统函数的系数。

一种更加有用的滤波器设计程序会接受通带边缘频率 ω_p,阻带边缘频率 ω_s,通常容差 δ_1 和阻带容差 δ_2 作为输入,然后就产生满足这些要求的离散时间滤波器的阶次和系数。

(f) 用下列设计算法写出一个函数 betterbutter:

- 将离散时间边缘频率预畸变到对应的连续时间频率。
- 计算出整数滤波器阶 N 和截止频率 Ω_c,使得完全满足滤波器在通带边缘的要求。对这一步,函数 ceil 可能是有用的。
- 将 Ω_c 畸变回到离散时间截止频率 ω_c。
- 用 MATLAB 函数 butter 设计所要求的滤波器,并产生该滤波器的系数和阶次。

你的函数的第一行应该读出

```
function [b, a, N]=betterbutter(wp, ws, d1, d2)
```

(g) 用你的函数设计一个满足在**基本题**中给出指标要求的滤波器。用 freqz 画一幅适当标注的频率响应的幅值图。所得出的系数与你用解析方法求得的相等吗?

(h) 用你的函数设计一个满足下列指标要求的滤波器:

- 通带频率 $\omega_p=0.3\pi$;
- 阻带频率 $\omega_s=0.4\pi$;
- 通带容差 $\delta_1=0.05$;
- 阻带容差 $\delta_2=0.025$。

用 freqz 证实这个滤波器的频率响应满足所给指标要求。你的滤波器的阶是什么?

第 11 章

反馈系统

在前面各章中，一直都是把注意力放在从输入到输出的角度分析和设计系统。具体地说，你已经研究了输出信号是如何由给定的输入信号产生的。在许多场合中，想用输出信号来改变输入信号以得到某种期望输出或系统特性。这种改变就称为反馈，因为输出信号是被回馈到系统的输入并与原输入结合在一起。反馈的一个例子就是飞机的导航。虽然在理论上一个领航员能够提前确定所需要的推力和航向驾驶飞机到达目的地，但是在实际中他不可能预计来自气压和风速方面的变化，而这些都会干扰飞机而偏离它期望的航线。为此，在飞行中他使用一些仪器用以确定飞机的速度和位置，这就能够用于调节领航员对飞机的输入（推力，航向等等）以到达他的目的地。事实上，正是这种反馈回路就成为当今普遍采用的自动导航仪的原理。

反馈不仅仅在考虑未知扰动方面是有用的，而且在稳定本来是不稳定的系统上也是有用的。一个这样不稳定的系统是一根扫帚柄的平衡系统，在这里用反馈克服由重力引起的不稳定性。这种反馈的应用在练习 11.1 中考虑。与其它的很多稳定方法（如补偿法）相比，反馈也是更可取的，因为反馈稳定对物理系统模型的不确定性是鲁棒的。这一反馈方面的问题以及用于设计稳定系统的函数 rlocus 的应用将包括在练习 11.2 中。另一种反馈的应用是扩大像运算放大器等放大器的带宽。虽然运算放大器在低频有很大的开环增益，但是放大器的带宽一般是很小的，而且在通带内放大倍数随频率变化很大。练习 11.3 要研究用反馈产生一个放大器，它与开环放大器相比可以在宽得多的带宽内具有相当稳定的增益。其代价是通带内增益值则按比例减小。

11.1 反馈稳定：杆的平衡

各种机械系统，其中包括飞行器的高度控制或机器人手臂的操纵都有平衡某一对象这样一个复杂问题，这个对象是某个固有不稳定系统的一部分。这个练习要考虑稳定不稳定系统的问题，它将控制一个对象的平衡，譬如在你手上的一根杆的平衡。或许你已经多次完成过这一平衡任务，所以你应该有关于这个问题困难性的一面，同时它也是有可能平衡的有关认识。然而，也应该明白若不用反馈则是不可能完成的。试试将一支铅笔的有橡皮一端放在你的掌心上平衡这根铅笔。现在闭上你的眼睛试试看！没有手的位置和铅笔位置的视觉反馈，这个任务是不可能完成的。这个练习将要考查对于平衡杆问题的一种简化形式需要什么样一类反馈。

考虑图 11.1 的系统。这部小车可以前后运动，其位置由 $s(t)$ 给出。小车的加速度服从

$s(t)=a(t)$。长度为 L 的杆用铰链与小车相连而使它仅能和小车运动的相同方向上移动。杆的位置由角度 $\theta(t)$ 给出。假设杆的全部质量都集中在杆的末端一个小球上。图中还指出一个角加速度 $x(t)$，它是由外力作用在杆上引起的，譬如风力。为了平衡这根杆，小车就必须用一个适当加速度 $a(t)$ 运动。

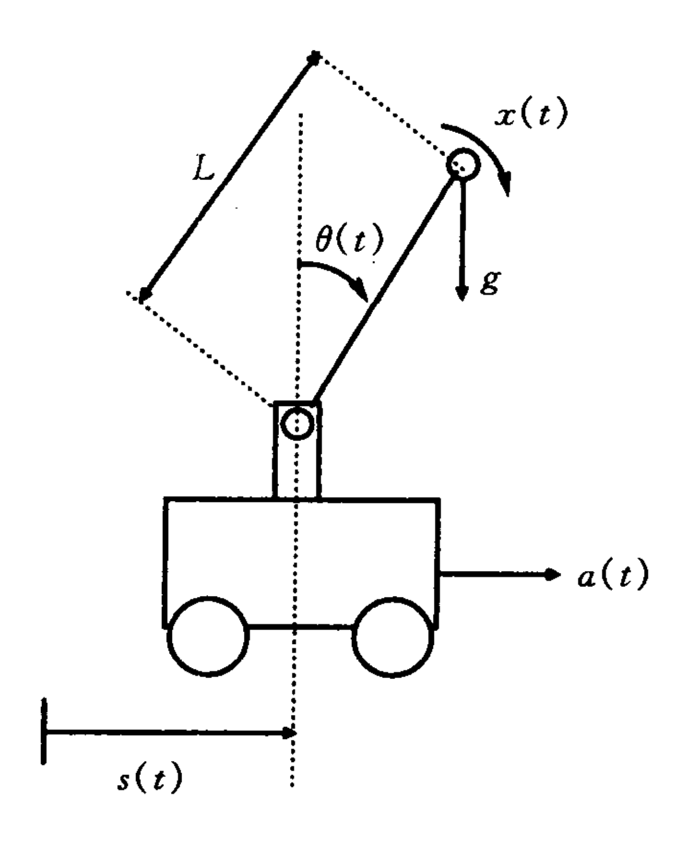


图 11.1　小车上杆的平衡

沿着垂直于杆的方向，在质量上将所有力平衡，将 $\theta(t)$，$a(t)$ 和 $x(t)$ 关联起来的微分方程就是

$$L\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}=g\sin(\theta(t))-a(t)\cos(\theta(t))+Lx(t) \tag{11.1}$$

应当注意，(11.1)不是一个线性微分方程。非线性系统的分析常常是比较困难的。然而，对于小的 $\theta(t)$ 可将这个方程线性化，这样就能够考查当杆处于接近垂直状态时(这也正是你想要的状态)的动态特性。这时，对 $|\theta(t)|\ll\pi$，可以作小角度近似

$$\sin\theta(t)\approx\theta(t),\qquad \cos\theta(t)\approx 1 \tag{11.2}$$

对下面的题，假设 $L=1$ m，$g=9.8$ m/s^2，并使用线性化方程

$$L\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}=g\theta(t)-a(t)+Lx(t) \tag{11.3}$$

基本题

(a) 如果小车是静止的，即 $a(t)=0$，求关于输入 $x(t)$ 到输出 $\theta(t)$ 的系统函数。用pzplot画该系统的零极点图，并从图中说明为什么系统不稳定。这个应该与你对手上的铅笔平衡的经验一致；一点不用移动你的手而要平衡你手中的铅笔是困难的。

(b) 现在考虑用比例反馈稳定这个系统，即用一个正比于角度 $\theta(t)$，$a(t)=k\theta(t)$ 的小车加速度。确定具有比例反馈的这个系统的系统函数。对一组设定值 k，k = linspace(0, 25,10)画出这个采用比例反馈系统的极点位置。

(c) 当 $x(t)=\delta(t)$ 时，求一个 k 值，以使杆的位置无休止地来回摆动。

(d) 用 impulse 对于(c)中的 k 值，仿真出在 t = linspace(0, 10, 100)上该系统的单位冲激响应，并将对 $\theta(t)$ 的仿真值存入 th。在这个范围内画一张适当标注的 $\theta(t)$ 图。

中等题

在**基本题**中，你应该已经发现系统不能仅用比例反馈来达到稳定。这意味着为了平衡这根杆，需要比杆的位置还要多的系统信息。下一组题将考虑用比例加导数反馈来稳定这个系统，即反馈形式为

$$a(t)=k_1\theta(t)+k_2\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

(e) 用解析方法确定具有比例加导数反馈系统的系统函数。证明你能找到 k_1 和 k_2 的值而使

系统稳定。用解析方法求出使闭环系统的阻尼比(ζ)为1,无阻尼自然频率(ω_n)是3 rad/s时的k_1和k_2值。有关ζ和ω_n的定义见练习6.1和练习9.2。

(f) 用 pzplot 作由(e)中所得k_1和k_2系统的零极点图。

(g) 用 lsim 仿真该系统在 t=linspace(0, 10, 100)上的单位冲激响应,并将对$\theta(t)$的仿真存入 th2。在这个范围内画一张适当标注的$\theta(t)$的图。

(h) 如果在$0 \leqslant t \leqslant 5$s 内存在一个小的随机扰动,总希望系统足够稳定而将这根杆恢复到垂直位置。创建随机扰动 x=[randn(1, 50) zeros(1,50)],它在$0 \leqslant t \leqslant 5$秒内为非零。用 lsim 仿真该系统对这个输入在 t 时间样本上的响应,将所得$\theta(t)$的仿真值存入 th3。在这个时间范围内画一张适当标注的$\theta(t)$的图。

(i) 画出在(h)中用于平衡这根杆的小车$a(t)$的加速度图。因为这个反馈是比例加导数,所以就需要$\theta(t)$和$\mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t$来创建$a(t)$,用后向欧拉的近似来近似$\mathrm{d}\theta(t)/\mathrm{d}t$。你可以发现函数 diff 是有用的。在小车质量为m时,要求多少力以产生$a(t)$?

11.2 不稳定系统的稳定

存在很多场合需要用一个固有不稳定系统作为大系统的一个部分。然而,在不稳定系统的输入和输出端接入反馈可以构成一个总的系统称之为闭环系统,而这个系统是稳定的。考虑一个因果不稳定系统,其系统函数为$H(s)$,在这个练习中假设全部系统函数都相应于因果系统。图11.2示出一个基本反馈系统。在这个反馈系统中,$H(s)$称为开环系统,而这个闭环系统其输入和输出满足$Y(s)=Q(s)*X(s)$,式中

$$Q(s)=\frac{H(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{11.4}$$

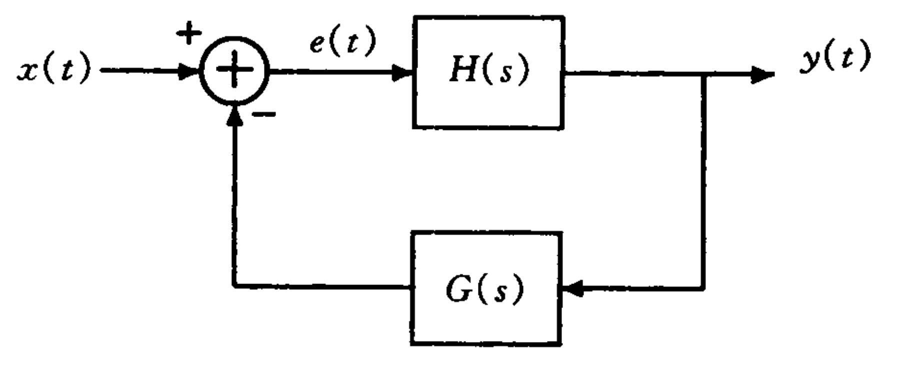


图11.2 利用反馈控制开环系统$H(s)$的特性

即使这个开环系统不稳定,如果$G(s)$选为使$Q(s)$的极点全部在 s 平而的左半而,那么这个闭环系统就是稳定的。这个练习要用函数 rlocus 分析开环系统$H(s)$的特性,并确定合适的反馈系统$G(s)$的参数。

基本题

考虑满足下列方程的不稳定系统:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=2y(t)+x(t) \tag{11.5}$$

式中$y(t)$可以描述在某有限时间区间内皮氏培养皿中的细菌量,输入$x(t)$可以表示在细菌繁殖上提供食物或温度的效果。考虑用加比例反馈$G(s)=K$稳定这个系统。

(a) 求闭环系统函数作为K的函数的$Q(s)$。

(b) 用解析法确定闭环系统作为K的函数的极点位置,对什么K值,闭环系统是稳定的?

对于由(11.4)式和 $G(s)=K$ 给出的闭环系统，函数 rlocus 能用来画出作为 K 的函数的极点位置图。尤其是，函数 rlocus 能解出作为 K 的函数的下列方程的根

$$1+KH(s)=0 \tag{11.6}$$

这些根就等于闭环系统的极点。如果 b 和 a 包含了 $H(s)$ 分子和分母多项式的系数，那么 rlocus(b,a)就画出了对于 $K\geqslant 0$ 时的(11.6)式的根轨迹，而 rlocus(-b,a)将画出 $K\leqslant 0$ 时的根轨迹。然而，根轨迹图并没有允许你确定 K 的值，从而导出一组极点位置。为了能做到这一点，在 rlocus 中可以给出输出宗量，即[r,k]=rlocus(b,a)，这里 r 中的每一行就包含了(11.6)式对应于在 k 中 K 值的根。

(c) 用 rlocus 验证由(b)中确定的极点位置。应该分别对 $K\geqslant 0$ 和 $K\leqslant 0$ 单独构成极点。也应该用[r,k]=rlocus(b,a)验证这些 K 值，对这些 K 值闭环系统是稳定的。

现在考虑系统为下列系统函数

$$H(s)=\frac{s^4+40s^3+600s^2+4\,000s+10\,000}{s^4-s^3+123s^2+50s+2\,500} \tag{11.7}$$

(d) 对比例反馈 $G(s)=K$，用 rlocus 画出闭环极点的位置。对 $K\geqslant 0$ 和 $K\leqslant 0$ 用单独的图。

(e) 用 rlocus 确定一个 K 值，以使得全部闭环极点 p_k 都满足 $-15<\mathrm{Re}(p_k)<0$ 和 $-5<\mathrm{Im}(p_k)<5$。

中等题

稳定一个不稳定系统的另一种方法是以级联形式与另一个系统相接，而使被接入系统的零点抵消不稳定的极点。这种方法称为补偿法，如图 11.3 所示。也就是说，如果 $H(s)$ 是有理的，有极点 $s=p_k$ 在 s 平面的右半面，那么这个补偿系统 $M(s)$ 就应该有零点在 $s=p_k$ 用以抵消这些不稳定的极点。然而，就如同在下面习题中所指出的，在实际中一般补偿法不会像反馈那样工作得很好。将要把一个补偿系统的性能与一个用比例反馈 $G(s)=K$ 系统的性能作比较。考虑开环系统的系统函数为

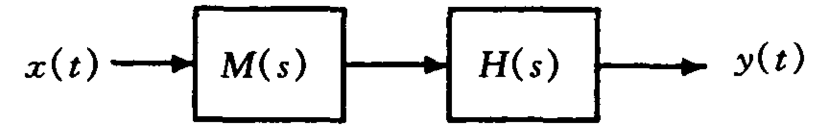


图 11.3 用补偿法稳定系统函数为 $H(s)$ 的不稳定系统

$$H(s)=\frac{s^2+5\sqrt{2}s+25}{s^2-1} \tag{11.8}$$

而补偿器为

$$M(s)=\frac{s^2-1}{2(s^2-3.6s+12.24)} \tag{11.9}$$

(f) 将 $H(s)$ 分母和分子多项式的系数存入向量 a 和 b。用 rlocus 画出具有比例反馈 $G(s)=K$ 的闭环系统的极点位置。对 $K\geqslant 0$ 和 $K\leqslant 0$ 分别作图。

(g) 用[r, k]=rlocus(b,a)估计闭环系统是稳定的 K 值。

(h) 求一个 K 值，使闭环系统极点的实部在 -1.8 ± 0.05 之内。对这个 K 值，将闭环系统的系统函数 $Q(s)$ 的分母和分子多项式的系数存入 ak 和 bk。

(i) 对时间样本 t=[0:0.1:5]，用 step 计算该闭环系统的单位阶跃响应。

(j) 将已补偿系统的系统函数 $H_c(s)=M(s)H(s)$的分母和分子多项式系数存入向量 ac 和 bc。确定已补偿系统函数的极点。

(k) 用 step 计算这个系统在时间样本 t 上的单位阶跃响应。这个单位阶跃响应应该非常类似于在(i)中所画出的闭环反馈系统的单位阶跃响应。

一般来讲,物理系统的真实特性是不知道的,譬如电阻随温度而改变。为此,任何系统设计在建模中都应容许有误差。考虑系统函数

$$H_\varepsilon(s) = \frac{s^2 + 5\sqrt{2}s + 25}{s^2 - \varepsilon s - (1+\varepsilon)} \tag{11.10}$$

式中 ε 表示由(11.8)式给出的系统模型参数的不确定性。

(l) 求出作为 ε 函数的(11.10)式系统函数的极点。

(m) 对于剩下的题,假设 $\varepsilon=0.01$。将这个系统函数 $H_\varepsilon(s)$的分母和分子多项式的系数存入 ae 和 be。

(n) 假设对于 $\varepsilon=0.01$ 的 $H(s)$是真实的开环系统函数。用在(h)中计算出的 K 值,将闭环系统函数 $Q(s)$分母和分子多项式的系数存入向量 ake 和 bke,再次假设是用比例反馈 $G(s)=K$。计算在时间样本 t 上,这个闭环系统的单位阶跃响应,并将它与在(i)中计算出的单位阶跃响应作比较。

(o) 将这个已补偿系统函数 $H_{c\varepsilon}(s)=M(s)H_\varepsilon(s)$分母和分子多项式的系数存入向量 ace 和 bce。计算在时间样本 t 上,这个已补偿系统的单位阶跃响应,并将它与在(k)中计算出的单位阶跃响应作比较。解释这两个单位阶跃响应之间的任何差别。

(p) 对于在开环系统的不确定性来说,反馈系统比补偿系统要鲁棒一些吗? 请解释。

11.3 利用反馈扩大放大器的带宽

以线性放大器设计的许多系统都要求用像 LM741 这样的运算放大器。运算放大器的开环增益一般都超过 10^5,在大多数应用中,这个增益比需要的高很多。然而,运算放大器的增益开始滚降的频率(称为运算放大器的带宽)却比系统所要求的低得多。例如,在一个线性放大器中,重要的是放大器的带宽要超过所要求输入信号的最高频率。如果不是这样,输入信号中高于带宽截止的频率分量将不会和那些低于它的频率分量有相同的放大,结果对于一个线性放大器其输出就不是输入信号的比例放大。

这个练习将研究一种方法,利用反馈牺牲一些放大器过剩的增益以换取较大的带宽。下面的一阶系统函数是运算放大器的一种简化模型:

$$H(s) = \frac{Gc}{s+c} \tag{11.11}$$

式中 $G=10^5$ 和 $c=2\pi(200)$。你还要用仿真这个系统来看看具有放大器的带宽超过输入信号最高频率分量的重要性。

基本题

(a) 用解析方法确定由(11.11)式给出的这个系统函数的开环 DC($s=0$)增益,以及系统的时

有关理论背景。另外,也提供了几本数学方面的教科书,让读者可以作一些有关信号与系统理论更为严谨的分析。

信号与系统

[1] GLISSON T. H.. Introduction to System Analysis. New York, NY:McGraw-Hill, 1985
[2] JACKSON L. B.. Signals, Systems, and Transforms. Reading, MA: Addison-Wesley, 1991
[3] KAMEN E.. Introduction to Signals and Systems. New York, NY:Macmillan, 1987
[4] LATHI B. P.. Linear Systems and Signals. Carmichael, CA: Berkeley-Cambridge Press, 1992
[5] LUENBERGER D. G.. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications. New York, NY:John Wiley, 1979
[6] MAYAN R. J.. Discrete-time and Continuous-time Linear Systems. Reading, MA: Addison—Wesley, 1984
[7] MCGILLEM C. D.. AND COOPER G. R. Continuous and Discrete Signal and System Analysis. 3rd ed. New York, NY:Holt, Rinehart and Winston, 1991
[8] OPPENHEIM A. V. AND WILLSKY A. S.. Signals and Systems. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997
[9] PAPOULIS A.. Signal Analysis. New York, NY:McGraw-Hill, 1977
[10] SIEBERT W. M.. Circuits, Signals, and Systems. Cambridge, MA:The MIT Press, 1986
[11] SOLIMAN S. AND SRINATH M.. Continuous and Discrete Signals and Systems. New York, NY:Prentice Hall, 1990
[12] TAYLOR F. J.. Principles of Signals and Systems. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. New York, NY:McGraw-Hill, 1994
[13] ZIEMER R. E. TRANTER W. H., AND FANNIN D. R.. Signals and Systems: Continuous and Discrete. 2nd ed. New York, NY:Macmillan, 1989

离散时间信号处理

[1] BURRUS C. S, McCLELLAN J. H., OPPENHEIM A. V., PARKS T. W., SCHAFER R. W., AND SCHUESSLER H. W.. Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB. Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, Inc., 1994
[2] DUDGEON D. E. AND MERSEREAU R. M.. Multidimensional Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, Inc., 1984
[3] HAYKIN S.. Adaptive Filter Theory. Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, Inc., 1991
[4] JOHNSON D. E.. Introduction to Filter Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976
[5] LIM J. S.. Two-Dimensional Signal and Image Processing. Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, Inc., 1990
[6] OPPENHEIM A. V.. AND SCHAFER R. W.. Discrete-Time Signal Processing. Englewood

附录 本书所用到的 MATLAB 命令及其所在章节号